Afrânio Austregésilo Thiel
Matheus dos Santos Modesti
Rafael Carlos Vélez Benito
(Organizadores)

1º Edição

INTRODUÇÃO À ANÁLISE REAL

teoremas e algumas aplicações

2018

INSTITUTO FEDERAL
MARANHENSE

Somos filiados:

Associação Brasileira
das Editoras Universitárias

Editora do Instituto Federal Catarinense
Rua das Missões, nº 100
Ponta Aguda – Blumenau – SC
CEP 89051-000

Editor: Eduardo Augusto Werneck Ribeiro
Conselho Editorial*:* Cladecir Alberto Schenckel, Fernando José Garbuio, Josefa Surek de Souza e Kátia Oliveira.

INTRODUÇÃO À ANÁLISE REAL: TEOREMAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Instituto Federal Catarinense – *Campus* Camboriú.

Prof. Dr. Rafael Carlos Vélez Benito, Prof. Dr. Afrânio Austregésilo Thiel e Matheus dos Santos Modesti

Camboriú
2018

FICHA CATALOGRÁFICA

Benito, Rafael Carlos Vélez
Introdução à Análise Real: Teoremas e Algumas Aplicações / Rafael Carlos Vélez Benito, Afrânio Austregésilo Thiel, Matheus dos Santos Modesti. -- Camboriú, 2018.

113 f. : il

ISBN: 978-85-5644-022-8.

Instituto Federal Catarinense, 2018.

1. Análise Real. 2. Ensino de Matemática. 3. Equações. I. Thiel, Afrânio Austregésilo. II. Modesti, Matheus dos Santos. I. , . II. Título..

AGRADECIMENTOS

Aos ‘acadêmicos’ que acreditaram na proposta de ensino vivo, mais dinâmico e mais significativo da Matemática, pela coragem e força para vencer as resistências contribuindo com seus artigos para a tessitura dessa obra, revelando o desafiante processo de escrever e estando abertos às novas aprendizagens.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense, por acreditar no potencial de seus servidores ‘técnico-administrativo e docente’ proporcionando a edição desta obra.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO **9**

INTRODUÇÃO - A FORMAÇÃO DE CONCEITOS E O USO DE TEOREMAS **11**

TEOREMAS DE ROLLE, VALOR MÉDIO E CAUCHY - DEMONSTRAÇÕES E ALGUMAS APLICAÇÕES **21**

Introdução **21**

Demonstrações **21**
Teorema de Rolle 21
Teorema do Valor Médio 22
Teorema de Cauchy 24

Algumas Aplicações **28**
Teorema de Rolle 28
Teorema do Valor Médio 29

A FÓRMULA DE TAYLOR E A IRRACIONALIDADE DO NÚMERO e **33**

Introdução **33**

Fórmula de Taylor **33**
Polinômio de Taylor de Ordem 1 33
Polinômio de Taylor de Ordem 2 37
Polinômio de Taylor de Ordem n 41
Fórmula de Taylor com resto de Lagrange 41
O número e é irracional 43

Conclusão **45**

A Transformada de Laplace **47**

Definição da Transformada de Laplace **47**
Integrais Impróprias 47
Função Seccionalmente Contínua 49

Transformadas Integrais 51

Soluções de Problemas de Valores Iniciais 55

A utilização de Softwares no Cálculo de Volumes de Sólidos de Revolução 69

Introdução 69

Apresentação do Tema 70

Conceitos 71

Volume de sólido obtido pela rotação em torno do eixo x, de um conjunto A 71

Volume de um sólido qualquer 72

Aplicação 74

Curva de Contorno 75

Cálculo do volume 78

Considerações Finais 80

Equações Diferencias Parciais - Problemas de Autovalores - Séries de Fourier 83

Equações Diferenciais Parciais 83

Problemas de Valores de Contorno para Fronteiras com Dois Pontos 83

Problemas de Autovalores 89

Séries de Fourier 93

Periodicidade das Funções Seno e Cosseno 94

Ortogonalidade das Funções Seno e Cosseno 96

As Fórmulas de Euler-Fourier 98

Teorema de Convergência de Fourier 105

Funções Pares e Ímpares 110

Séries em Cossenos 112

Considerações Finais 113

APRESENTAÇÃO

> Nada é fixo para aquele que alternadamente pensa e sonha... (BACHELARD[1], 1957, p. 95)

Percebe-se que muitos teoremas por serem apresentados de forma simplificada, deixam de mostrar toda a elegância do percurso realizado, produzindo a ideia ao leitor de que o seu desenvolvimento demandou poucas horas de estudos, passando a existir em um piscar de olhos, além de ter uma linearidade e organização perfeita. Essa afirmação não é correta, pois na maioria dos casos, o pesquisador nesta ação, leva horas de estudos e de ensaios até chegar a um termo final.

Por isso, o objetivo desta obra é disponibilizar aos leitores 'acadêmicos em fase de formação inicial' e 'profissionais em formação continuada', na área das Ciências Exatas e da Terra – Engenharias, um texto com a demonstração detalhada de um rol de teoremas, de modo a permitir o entendimento perfeito e intuitivo de conceitos básicos, sem prejuízo da precisão matemática. Ressalta-se que para bem compreender o texto, o leitor já deverá estar familiarizado com os principais teoremas do Cálculo Diferencial e Integral.

Essas demonstrações foram fruto de seminários realizados na disciplina de Análise Real, tendo a participação dos acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal Catarinense – *Campus* Camboriú. Destaca-se

---

[1] Gaston Bachelard (27/06/1884 - 16/10/1962) foi um filósofo e poeta francês. Seu pensamento está focado principalmente em questões referentes à filosofia da ciência. A frase acima foi extraída do livro 'Châteaux em Espagne. Cercle Grolier Lês Amis du Livre Moderne, 1957'.

também que os capítulos são independentes, não obedecendo uma sequência fixa, podendo ser lidos separadamente.

O texto desta obra apresenta:

- Os Teoremas de Rolle, Valor médio e Cauchy – demonstrações e algumas aplicações.
- A Fórmula de Taylor e a irracionalidade do número e.
- A Transformada de Laplace.
- Aplicações da Integral: um experimento com sólidos de revolução.
- Equações diferenciais parciais – problemas de autovalores – Séries de Fourier.
- As fórmulas de Euler-Fourier.

Acreditando estar contribuindo para a divulgação destas demonstrações junto ao meio acadêmico destacamos a afirmação de René Descartes[2] de que: "As matemáticas têm invenções muito sutis e que podem servir bastante, tanto para contentar os curiosos como para facilitar todos os ofícios e diminuir o trabalho dos homens".

Os Organizadores

---

[2] René Descartes (31/03/1596 – 11/02/1650) foi um filósofo, físico e matemático francês, chamado de 'fundador da filosofia moderna' e 'pai da matemática moderna', aplicou de forma independente a álgebra à geometria.

INTRODUÇÃO - A FORMAÇÃO DE CONCEITOS E O USO DE TEOREMAS

> Tal como um bebê que, aprendendo a falar balbucia todos os fonemas em todas as línguas, mas ouvindo a sua mãe aprende a distinguir e utilizar apenas os fonemas de sua língua materna, assim nós, os matemáticos, que balbuciamos em todos os ramos da Matemática, deveríamos escutar a natureza mãe para descobrir quais são os ramos naturais de nossa Ciência. (René Thom[3])

O conhecimento não é apenas produzido pela prática, mas também é incrementado pela teoria. Por meio desta afirmação destaca-se que a teoria tem importância fundamental, pois de posse do aporte teórico temos alguns pontos de vista para uma tomada de decisões, dentro de uma prática contextualizada, proporcionando concepções para compreender o mundo à nossa volta e poder atuar nele.

Ferreira, Machado e Santinho (2009, p. 144) registram que Vygostky (1989) ao estudar os experimentos de Ach (1921) conclui que:

> A formação de conceitos é o resultado de uma atividade complexa, em que todas as funções intelectuais básicas tomam parte. No entanto, o processo não pode ser reduzido à associação, à atenção, à formação de imagens, a inferências ou às

[3] René Thom (1923 – 2002) - Matemático francês. Por seus trabalhos em topologia diferencial, em particular a teoria do 'cobordismo', o estudo das bordas, foi laureado com a Medalha Fields (1958), o equivalente ao Nobel dos matemáticos.

> tendências determinantes. Todas são indispensáveis, porém insuficientes sem o uso do signo, ou da palavra, como meio pelo qual conduzimos as nossas operações mentais do problema que enfrentamos.

Segundo Thiel e Modesti (2016, p. 109),

> a formação do conceito de um elemento matemático, historicamente surge, ou seja, vai criando forma, quase sempre passando de mãos em mãos, diante de uma necessidade prática do ser humano para encontrar resposta a algo que o incomoda, seja ele real ou fictício, produzindo sentido ao saber. É fato também, que os livros didáticos simplificam o caminho seguido ou até mesmo descrevem em outra ordem o caminho inicialmente percorrido até a formação dos conceitos; apresentam uma linearidade e organização na apresentação de um conceito de forma mais didática sendo que na história da matemática, esta evolução teve uma ou outra ruptura, períodos de estagnação e retornos ao longo do processo.

Percebe-se a matemática como uma das mais importantes ferramentas da sociedade moderna, estando presente em praticamente tudo o que nos rodeia, com maior ou menor complexidade. Além disto, quando se transita no estudo da

Matemática e das Ciências, vê-se que o trajeto é permeado por alguns termos[4] recorrentes, sendo eles:

1) Hipótese: uma hipótese, suposição ou especulação é uma formulação provisória, com intenções de ser posteriormente demonstrada ou verificada, constituindo uma suposição admissível. Na matemática, 'é o conjunto de condições para poder iniciar uma demonstração'.

   As hipóteses primeiras nem sempre são definitivas e estas, quando firmadas, nem sempre são as ideais, ainda que satisfaçam condições momentâneas. Surge no pensamento científico após a coleta de dados observados (fatos) e da conseguinte necessidade de explicação da inter-relação destes e dos fenômenos a estes associados. É normalmente seguida de experimentação, que pode levar à verificação ou refutação da hipótese. Assim que verificada, a hipótese passa a se chamar 'postulado', podendo alcançar o status de 'lei'. O uso de 'hipótese' (ou 'lei') e 'teoria' como sinônimos, mostra-se, entretanto incorreto, sendo a última definida por conceito bem mais abrangente, no qual incluem-se as hipóteses e/ou as leis como partes integrantes, mas estas não o fazem de forma a definir a mesma em sua íntegra.

2) Conjectura: ação ou efeito de deduzir ou de fazer inferências, baseando-se em palpites, intuições, provas inconclusas ou suposições. Alguns sinônimos de

[4] As definições desses termos foram organizadas tomando como fonte alguns apontamentos acadêmicos e o novo dicionário da língua portuguesa (FERREIRA, 2009).

conjectura: hipótese, pressuposição, pressuposto, presunção, prognose, prognóstico e suposição.

3) Axioma: um axioma é uma 'hipótese inicial' de qual outros enunciados são logicamente derivados, ou seja, o que se considera como fato reconhecido e ponto de partida, implícito ou explícito, de uma argumentação; premissa. Pode-se dizer que um axioma é toda afirmação ou fato admitido sem necessidade de demonstração. Pode ser uma sentença, uma proposição, um enunciado ou uma regra que permite a construção de um sistema formal.

   Diferentemente de teoremas, axiomas não podem ser derivados por princípios de dedução e nem são demostráveis por derivações formais, simplesmente porque eles são hipóteses iniciais. Isto é, não há mais nada a partir do que eles seguem logicamente (em caso contrário eles seriam chamados teoremas). Em muitos contextos o postulado é sinônimo de: axioma, máxima, premissa.

4) Teorema: um teorema 'é uma afirmação que pode ser provada como verdadeira através de outras afirmações já demonstradas, como outros teoremas, juntamente com afirmações anteriormente aceitas, como axiomas'. Já 'prova' é o processo de mostrar que um teorema está correto.

   O termo teorema foi introduzido por Euclides, em Elementos, para significar 'afirmação que pode ser provada'. Em grego, originalmente significava 'espetáculo' ou 'festa'. Atualmente, é mais comum deixar

o termo ‘teorema’ apenas para certas afirmações que podem ser provadas e de grande importância matemática’, o que torna a definição um tanto subjetiva. É importante notar que ‘teorema’ é diferente de ‘teoria’.

5) Teoria: é uma síntese aceita de um vasto campo de conhecimento, consistindo-se de hipóteses necessariamente falseáveis – mas não por isto, erradas, dúbias ou tão pouco duvidosas que foram e são permanentemente e devidamente confrontadas entre si e com os fatos científicos, fatos estes que integram um conjunto de evidências que, juntamente com as hipóteses, alicerçam o conceito científico. As hipóteses em casos específicos, devido á simplicidade e ampla abrangência, podem ser elevadas ao status de leis.

   Ressalta-se aqui, portanto, que uma ‘teoria científica’ é o conjunto indissociável dos dois subconjuntos: ‘o subconjunto de fatos naturais’, evidências necessariamente verificáveis, mas, ao contrário do que muitos pensam, não obrigatoriamente reprodutíveis, e ‘um subconjunto de hipóteses científicas’ adequadas à descrição destes fatos, de ideias necessariamente falseáveis, testáveis (e testadas) frente às evidências e que, junto àquele, dão corpo ao conceito de teoria científica.

Usualmente deixa-se o termo "teorema" apenas para as afirmações que podem ser provadas de grande importância. Assim, são dados outros nomes para os outros tipos dessas afirmações:

- Uma Proposição é uma sentença não associada a algum outro teorema, de simples prova e de importância matemática menor.
- Um Lema é um "pré-teorema", um teorema que serve para ajudar na prova de outro teorema maior. A distinção entre teoremas e lemas é um tanto quanto arbitrária, uma vez que grandes resultados são usados para provar outros. Por exemplo, o Lema de Gauss e o Lema de Zorn são muito interessantes *per se*, e muitos autores os denominam de Lemas, mesmo que não os usem para provar alguma outra coisa.
- Um Corolário é uma consequência direta de outro teorema ou de uma definição, muitas vezes tendo suas demonstrações omitidas por serem simples.

Alguns outros termos também são usados, por mais que raros e com definição menos rigorosa, basicamente sendo empregados quando não se quer usar a palavra 'teorema':

- Regra.
- Lei, que também pode se referir a axiomas, regras de dedução e a distribuições de Probabilidade.
- Princípio.
- Algoritmo (como em Algoritmo da Divisão), muito raro e diferente do conceito com o mesmo nome que é um dos estudos centrais da Ciência da Computação.
- Paradoxo, usado quando a afirmação vai aparentemente de encontro com alguma outra verdade ou com alguma noção intuitiva. Entretanto, tal termo também pode ser usado para afirmações falsas que aparentem ser verdadeiras em um primeiro momento; (do Grego: '*para*'

= contrário a / ou oposto de; e '*doxa*' = quer dizer opinião). O paradoxo muitas vezes depende de uma suposição da linguagem falada, visual ou matemática, porque modela a realidade descrita – é, portanto, uma ideia lógica que transmite uma mensagem que contradiz a sua estrutura.

Alguns teoremas continuam a ser chamados de Conjecturas logo após serem provados. O termo conjectura é usado para afirmações que não sabemos se são verdadeiras, e que se acredita que são verdadeiras, mas nunca ninguém conseguiu prová-las nem negá-las (às vezes conjecturas são chamadas de hipóteses (como em Hipótese de Riemann), obviamente num sentido diferente do aqui já descrito).

6) Recorrência matemática (ou passo recorrente): é a ação ou efeito de recorrer; ação de voltar ou acontecer novamente; retorno.

7) Tese: uma tese (literalmente 'posição', do grego $\theta\varepsilon\sigma\iota\varsigma$) é uma proposição intelectual. Atualmente, é considerado principalmente o trabalho acadêmico que apresenta o resultado de investigação complexa e aprofundada sobre temas mais ou menos amplos, com abordagem teórica definida. É um texto que se caracteriza pela defesa de uma ideia, de um ponto de vista. Ou então, pelo questionamento acerca de um determinado assunto. O autor do texto dissertativo trabalha com 'argumento', com 'fatos', com 'dados', que utiliza para reforçar ou justificar o desenvolvimento de suas ideias.

Portanto, o desenvolvimento de uma investigação é marcado por uma série de fatores e ações. Segundo Bassanezi e Ferreira Jr. (1988, p. 3) no processo de interação entre a teoria

matemática e as outras ciências, vivencia-se os seguintes aspectos:

> Primeiro, a concepção de uma estrutura abstrata com símbolos e regras bem definidas, a partir de motivações de ordem prática, isto é, 'a construção de uma teoria matemática'. Segundo, a elaboração desta teoria matemática em termos abstratos, procurando desenvolvê-la para melhor realizar as operações nela definidas [...], ou seja, 'o estudo matemático da teoria'. E, em terceiro lugar, a utilização desta teoria matemática no estudo de inúmeros problemas, alguns dos quais certamente não tiveram nenhum papel na motivação original para a concepção da estrutura, isto é, 'a aplicação da teoria matemática'.

E assim, a Matemática enquanto instrumento intelectual possibilita por meio da abstração e formalização, a síntese de ideias, as quais embora semelhantes surgem em situações as mais diversas e por isto mesmo camufladas 'na sua essência[5]'. Face a isto, "o objetivo da Matemática é, então, extrair esta essência e formalizá-la em um contexto com uma extraordinária economia de pensamento". (BASSANEZI; FERREIRA JR., 1988, p. 3)

No desenvolvimento dos capítulos desse compêndio serão apresentadas demonstrações cuidadosamente explanadas de alguns 'teoremas', de tal modo que a exposição esteja sempre à altura da experiência e maturidade do estudante, procurando articular a sua capacidade de raciocínio, as representações e a significação de conceitos da matemática.

---

[5] No seu cerne, ou seja, no seu particular.

Referências

BASSANEZI, R.; FERREIRA JR.,W. C. **Equações diferenciais com aplicações**. São Paulo: HARBRA, 1988. 568 p.

FERREIRA, A. B. de H. **Novo dicionário da língua portuguesa**. 4. ed. Curitiba: Positivo, 2009. ISBN 978-85-385-2825-8

FERREIRA, E. S.; MACHADO, R. M.; SANTINHO, M. S. Qual é a função da função. In: FÁVERO, Maria Helena; CUNHA, Célio da (Org). **Psicologia do conhecimento: o diálogo entre as ciências e a cidadania**. Brasília: UNESCO, Universidade de Brasília, 2009. p. 144-164. IBSN 978-85-7652-088-7

THIEL, A. A.; MODESTI, M. dos S. **O Cálculo e a Matemática Superior**: algumas aplicações. Blumenau: Instituto Federal Catarinense, 2016. 120 p. ISBN 978-85-5644-007-5

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e Linguagem**. São Paulo:Martins Fontes, 1989. ISBN 85-336-2116-7

TEOREMAS DE ROLLE, VALOR MÉDIO E CAUCHY - DEMONSTRAÇÕES E ALGUMAS APLICAÇÕES

Matheus dos Santos Modesti[6]

Introdução

O presente trabalho objetiva demonstrar três famosos teoremas do cálculo e trazer algumas aplicações: Teorema de Rolle, Teorema do Valor Médio e Teorema de Cauchy.

O primeiro deles é de autoria de Michel Rolle (1652 – 1719), matemático francês, e nos dá as condições suficientes para a existência de um ponto crítico em uma função.

O segundo também é conhecido como Teorema de Lagrange (1736 - 1813), e tem aplicações importantes na física e no desenho de gráficos.

O terceiro é de autoria de Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857), e é uma versão mais geral do Teorema do Valor Médio.

Demonstrações

Teorema de Rolle

Teorema de Rolle: Se f, uma função real de uma variável, é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), e $se\ f(a) = f(b)$, então $f'(c) = 0$ para ao menos um número c em (a, b).

Demonstração:

A função f deve pertencer a ao menos uma das três categorias abaixo:

---

[6] Ex-Acadêmico do Instituto Federal Catarinense – *Campus* Camboriú. Especialista em Metodologias do Ensino da Matemática. Professor de Matemática. matheusmodesti@gmail.com

i) $f(x) = f(y), \forall\, y \in\ (a, b)$. Nesse caso, f é uma função constante, e $f'(x) = 0$

ii) $f(x) > f(a)$, para algum x em (a, b). Nesse caso, o máximo de $f(x)$ em $[a, b]$ é maior que $f(a)$ ou $f(b)$, devendo assim ocorrer algum ponto c em (a, b). Como a derivada existe neste intervalo, concluímos que $f'(x) = 0$.

iii) $f(x) < f(a)$, para algum x em (a, b). Nesse caso, o mínimo de f em $[a, b]$ é menor que $f(a)$ ou $f(b)$, devendo ocorrer em algum ponto c de (a, b). Da mesma forma que em (ii), conclui-se que $f'(c) = 0$

Corolário (Rolle): Se uma função real e de uma variável f é contínua em $[a, b]$, e se $f(a) = f(b)$, então f tem ao menos um ponto crítico em (a, b).

Demonstração:

Se, por um lado, f' não existir em algum ponto c em (a, b), então c é crítico.

Se f' existir em todo (a, b), então pelo Teorema de Rolle, existe um ponto crítico.

Teorema do Valor Médio

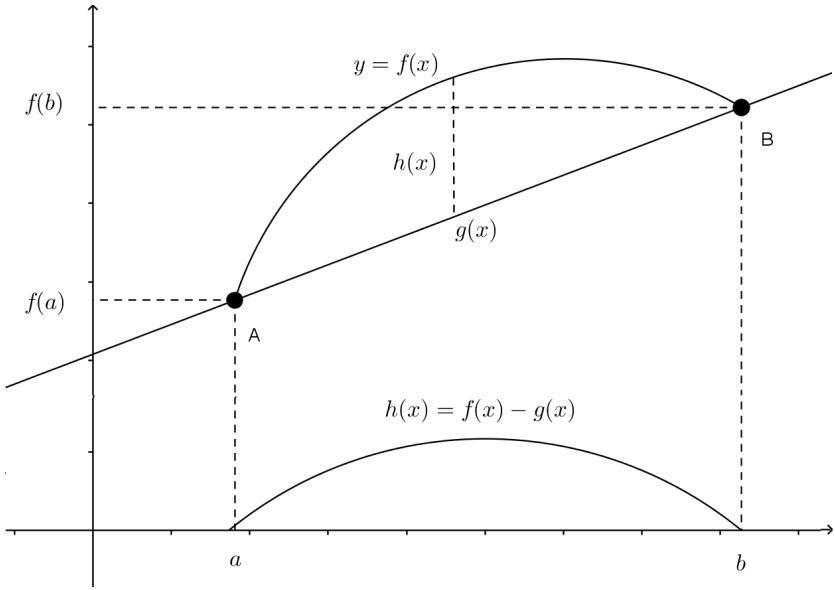
Teorema do Valor Médio: Se uma função real de uma variável f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e é diferenciável em (a, b), então existe c em (a, b) tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Ideia Geométrica:

Traçamos o gráfico de f como uma curva no plano, e uma reta nos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$.

Figura 1.1 - Gráfico do Teorema de Valor Médio



Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa reta é o gráfico da função

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Demonstração:

A diferença entre $f(x)$ e $g(x)$ é expressa por $h(x)$

$$h(x) \ = \ f(x) - g(x)$$

$$= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad (1.1)$$

Note que $h(a) = h(b) = 0$. Dessa forma, pelo Teorema de Rolle, $h' = 0$ em algum $c \in (a, b)$. Derivando a função expressa na equação (1.1) temos

$$\begin{aligned} h(x) &= f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ h(c) &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ 0 &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

Teorema de Cauchy

Teorema de Cauchy: Se f e g, funções reais de uma variável, forem contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b), então existirá ao menos um c em (a, b) tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$$

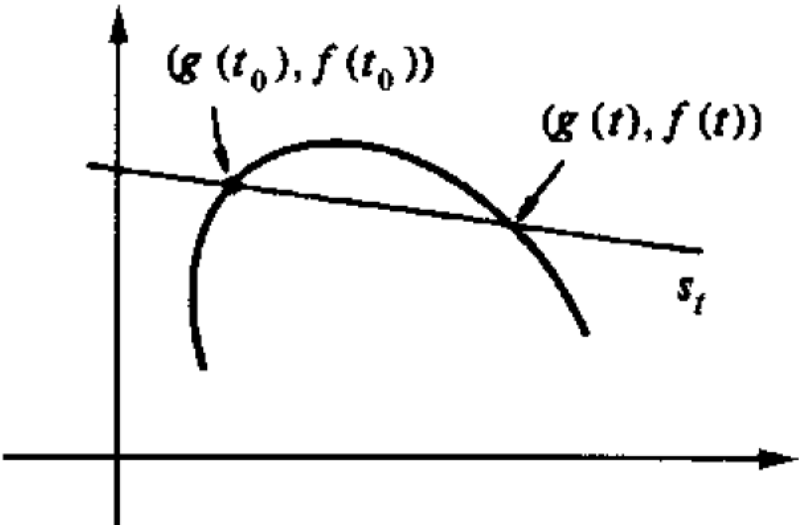
ou

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

se $g(b) \neq g(a)$ e $g'(c) \neq 0$.

Ideia Geométrica: Suponha f e g deriváveis em um intervalo I, $t_0 \in I$ e $g'(t_0) \neq 0$. Vamos definir a reta secante à curva no ponto $(g(t_0), f(t_0))$.

Figura 1.2 - Gráfico do Teorema de Cauchy (1)



Fonte: Guidorizzi (2001, p. 462).

O coeficiente angular da reta secante s_t é

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{g(t) - g(t_0)}$$

Já o coeficiente angular da reta tangente à curva em $(g(t_0), f(t_0))$ será

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{g(t) - g(t_0)}$$

Assim

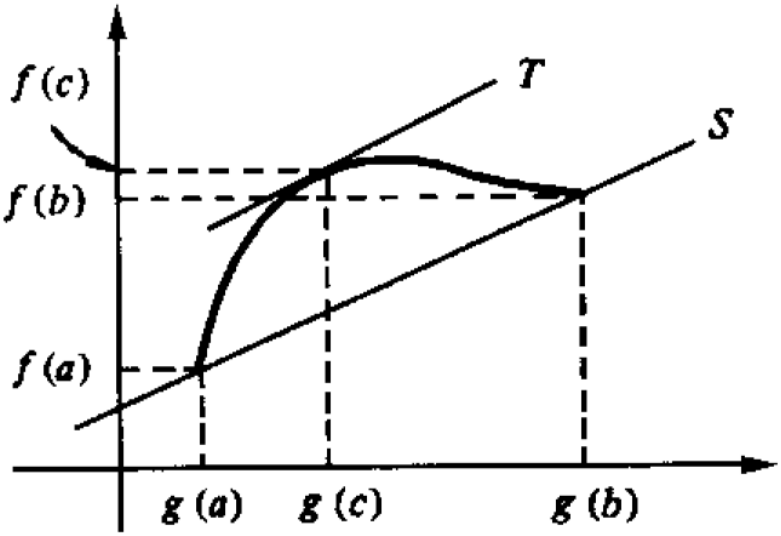
$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{g(t) - g(t_0)} = \lim_{t \to t_0} \frac{\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}}{\dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}} = \frac{f'(t_0)}{g'(t_0)}$$

Dessa forma, a reta tangente à curva em $(g(t_0), f(t_0))$ é a reta que passa por este ponto e que tem coeficiente angular $\frac{f'(t_0)}{g'(t_0)}$. A equação dessa reta será

$$y - f(t_0) = \frac{f'(t_0)}{g'(t_0)}(x - g(t_0))$$

Suponhamos agora f e g contínuas em $[a, b]$, deriváveis em (a, b) e $g'(t) \neq 0$ em (a, b).

Figura 1.3 - Gráfico do Teorema de Cauchy (2)



Fonte: Guidorizzi (2001, p. 463).

O coeficiente angular de S é $\frac{\mathrm{f(b)-f(a)}}{\mathrm{g(b)-g(a)}}$.

Vemos, geometricamente, que existe um ponto $(g(c), f(c))$ tal que a reta T que passa neste ponto é paralela à reta S. O coeficiente angular de T é $\frac{f'(c)}{g'(c)}$; Então, para este c,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demonstração:

Seja $h(x) = [f(b)-f(a)]g(x) - [g(b)-g(a)]f(x)$, $x \in [a, b]$.

Vamos analisar $h(a)$ e $h(b)$:

$$h(a) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$$
$$h(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$$

Note que $\mathrm{h}(a) = h(b)$.

Pelo Teorema de Rolle, existe c em (a, b) tal que $h'(c) = 0$. Daí

$$h'(c) = (g(b)-g(a))f'(c) - (f(b)-f(a))g'(c) = 0$$

Ou seja,

$$(g(b)-g(a))f'(c) = (f(b)-f(a))g'(c)$$

e

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Nota: se $g(x) = x$, $g'(x) = 1$ e o Teorema de Cauchy é igual ao TVM.

Algumas Aplicações

Teorema de Rolle

Teorema de Rolle na Física

Considere uma bola jogada para cima de uma altura inicial de $2m$. Em algum momento, a bola para de subir e desce, até atingir novamente a altura de $2m$.

Logo, se f é uma função que dá a altura da bola em metros no instante t, o Teorema de Rolle nos garante que em algum momento a velocidade da bola de anula, pois $f(t_0) = f(t_1) = 2$, onde t_0 é o instante inicial, e t_1 o instante de tempo final onde a altura mede $2m$.

Como essa função é contínua e diferenciável, existe c em (t_0, t_1) tal que $f'(c) = 0$.

Teorema de Rolle na busca de raízes de um polinômio

A seguir, mostraremos que a função $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ tem exatamente uma raiz real:

Temos que $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$. Como há troca de sinal entre os valores da função, e f é contínua, podemos afirmar pelo Teorema do Valor Intermediário que no intervalo $(0,1)$, existe c tal que $f(c) = 0$, e f tem ao menos uma raiz real.

Agora, suponha que f tem duas raízes reais. Assim, existem a e b tais que $f(a) = f(b) = 0$. A função f é derivável e contínua em todo domínio, pois é um polinômio. Assim, pelo Teorema de Rolle, existe c entre a e b tal que $f'(c) = 0$.

Mas isso é um absurdo, pois $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1$, para todo x. Logo, a função só tem uma raiz real.

Teorema do Valor Médio

Ideia Física

Se você viajar de uma cidade X para uma cidade Y, cuja distância é de $3000km$ em um tempo de 6 horas, pelo Teorema do Valor Médio, em ao menos um ponto, você estará andando à velocidade média de $500km/h$.

Crescimento e Decrescimento de Funções

Reescrevendo o TVM de outra forma, temos

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Rightarrow \ f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$$

Assim:

- Se $f'(c) > 0$ então $f(b) > f(a)$, e a função é crescente.
- Se $f'(c) < 0$, então $f(b) < f(a)$, e a função é decrescente.
- Se $f'(c) = 0$, então $f(b) = f(a)$, e a função é constante.

Estimativa de Funções

Suponha que $f(0) = -3$ e $f'(x) \leq 5$ para todos os valores de x. Quão grande $f(2)$ pode ser, supondo que f é contínua e derivável em todo o domínio?

Aplicando o TVM no intervalo $(0,2)$, temos

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{f(2)+3}{2}$$

Mas, $f'(c) \leq 5$, logo

$$\frac{f(2)+3}{2} \leq 5 \Rightarrow f(2) \leq 7.$$

Consequências do TVM

1) Funções com derivadas nulas são constantes

Se $f'(x) = 0$ em todo (a, b), então $f(x) = c$, para todo x em (a, b), e c é constante.

Demonstração:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Leftrightarrow f(b) - f(a) = 0 \Leftrightarrow f(b) = f(a)$$

2) Funções com a mesma derivada diferem por uma constante:

Se $f'(x) = g'(x)$ em cada ponto x de um intervalo (a, b), então existe uma constante c tal que $f(x) = g(x) + c$ para qualquer $x \in (a, b)$.

Demonstração:

Em cada ponto $x \in (a, b)$, a derivada da função $h(x) = f(x) - g(x)$ é

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Assim, pelo primeiro tópico, $h(x) = c$. Isto é: $f(x) - g(x) = c$ em (a, b), e então, $f(x) = g(x) + c$.

Exercício (LEITHOLD, 1994, p. 243)

Dada $f(x) = x^{2/3}$, faça um esboço do gráfico de f. Mostre que não existe nenhum número c no intervalo aberto $(-2,2)$ tal que

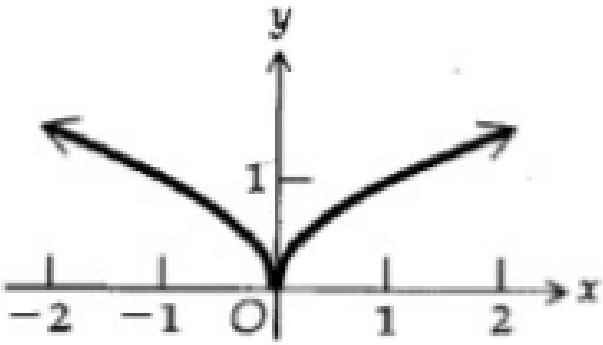
$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$$

Que condição dentre as hipóteses do TVM não será satisfeita para f quando $a = -2$ e $b = 2$?

Solução

Um esboço do Gráfico de f está na figura 1.4.

Figura 1.4 - Gráfico de $x^{2/3}$



Fonte: Leithold (1994, p. 243).

A derivada de f é $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$. Assim

$$f'(c) = \frac{2}{3}c^{-1/3}$$

Mas, usando o TVM

$$\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{4^{1/3} - 4^{1/3}}{4} = 0$$

Não existe número c tal que $\frac{2}{3}c^{1/3} = 0$.

A função f é contínua no intervalo $[-2,2]$, entretanto, a função não é derivável em $(-2,2)$, pois $f'(0)$ não existe. Logo, essa condição do TVM não é satisfeita.

Referências

GUIDORIZZI, L.H. **Um curso de cálculo** - Volume 1. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. 635 p.

LEITHOLD, L. **Cálculo com Geometria Analítica** 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994, 685 p.

A FÓRMULA DE TAYLOR E A IRRACIONALIDADE DO NÚMERO e

Rafaela Filippozzi[7]

Introdução

A Fórmula de Taylor ou Polinômio de Taylor é uma expressão que permite o cálculo do valor de uma função por aproximação local através de uma função polinomial. As aproximações de Taylor para uma função constituem uma das mais importantes ferramentas em otimização, tanto no desenvolvimento da teoria quanto na construção de algoritmos. Aparecem, por exemplo, na demonstração das condições de otimalidade de segunda ordem e na ideia do Método de Newton.

Neste trabalho será apresentado as aproximações de primeira e segunda ordem, e de ordem n, apesar de grau superior a 2 serem mais precisas, deixam de ser convenientes pelo alto custo computacional para o cálculo das derivadas. Contudo será essencial para demonstrar a irracionalidade do número e.

Há dois teoremas importantes que serão utilizados ao decorrer do trabalho: o teorema de Rolle e o Teorema de Caychy[8].

Fórmula de Taylor

Polinômio de Taylor de Ordem 1

---

[7] Ex-Acadêmica do Instituto Federal Catarinense – *Campus* Camboriú. rafaela.filippozzi@gmail.com.

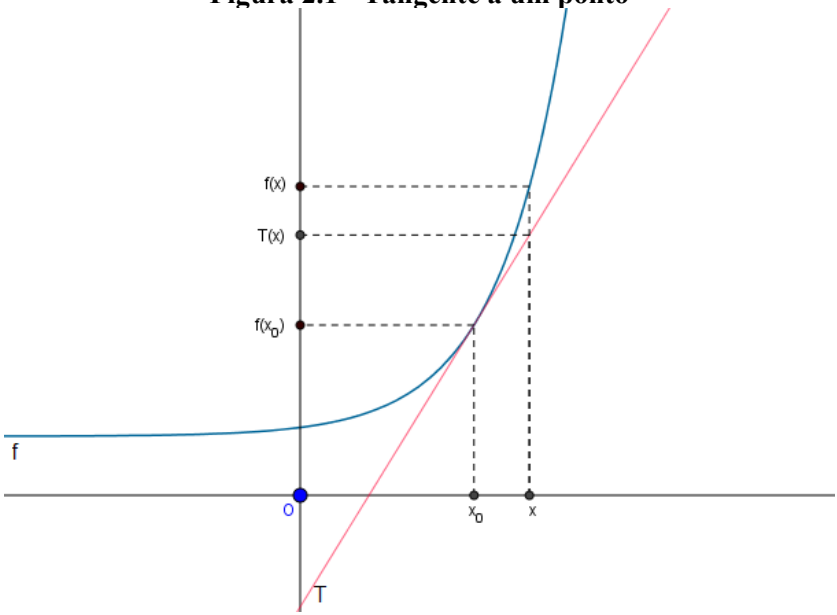
[8] Esses teoremas já estão demonstrados, e dessa forma, suprimimos as demonstrações. O leitor que desejar pode voltar no texto ao capítulo anterior e encontrar as provas.

Supondo f uma função real de um variável derivável, ou seja, sua derivada existe em cada ponto do seu domínio, num intervalo contendo um ponto x_0, define-se uma função $T(x)$ expressa por

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (2.1)$$

Logo, a equação (2.1) é da reta tangente de $f(x)$ no ponto x_0, como vemos na figura 2.1.

Figura 2.1 - Tangente a um ponto



Fonte: Elaborado Pela Autora.

Para cada x pertencente ao domínio o erro $E(x)$ que se comete na aproximação de $f(x)$ por $T(x)$. Assim sendo

$$f(x) = T(x) + E(x). \tag{2.2}$$

Substituindo temos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + E(x).$$

Isolando $E(x)$ obtemos

$$E(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

E dividindo ambos os lados da igualdade por $x - x_0$, de forma que $x - x_0 \neq 0$:

$$\frac{E(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0). \tag{2.3}$$

Assim, quando $x \to x_0$, o erro $E(x)$ tende a zero mais rapidamente que $(x - x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0 \tag{2.5}$$

Sendo assim se f for derivável em x_0, definimos $T(x)$ como a função afim que melhor aproxima localmente a f em volta de x_0. E a função T acima é uma função polinomial de grau no máximo 1.

Observe que os valores de f e T em x_0 são iguais, bem como os de suas derivadas

$$f(x_0) = T(x_0) \text{ e } f'(x_0) = T'(x_0).$$

Sendo assim, o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de x_0 é

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (2.5)$$

Para a expressão do erro do polinômio de Taylor de ordem 1 temos o seguinte teorema:

Teorema: Seja f uma função real de uma variável derivável até a segunda ordem no intervalo aberto I e sejam x, x_0 pertencentes à I. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x e x_0 tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2$$

Demonstração: Queremos mostrar que

$$E(x) = \frac{f''(\overline{x})}{2}(x - x_0)^2$$

Note que $E(x_0) = 0$ e $E'(x_0) = 0$.

Seja $h(x) = (x - x_0)^2$, sendo assim, $h(x_0) = 0$ e $h'(x_0) = 0$. Temos

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E(x) - E(x_0)}{h(x) - h(x_0)}$$

Pelo teorema de Cauchy, existe $\overline{x_1}$ no intervalo de extremos x_0 e x tal que

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E'(\overline{x_1})}{h'(\overline{x_1})}$$

Tendo em vista que $E'(x_0) = h'(x_0) = 0$

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E'(\overline{x_1}) - E'(x_0)}{h'(\overline{x_1}) - h'(x_0)}$$

Novamente, pelo Teorema de Cauchy, existe $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e $\overline{x_1}$ tal que

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E''(\bar{x})}{h''(\bar{x})}$$

Como $E''(x) = f''(x)$, $h'(x) = 2x$ e $h''(x) = 2$, substituindo temos

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{f''(\bar{x})}{2}$$

Portanto,

$$E(x) = \frac{f''(\bar{x})}{2}\big(h(x)\big).$$

Substituindo $h(x) = (x - x_0)^2$

$$E(x) = \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2 \qquad (2.6)$$

Para algum $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x e x_0. Como queríamos demonstrar.

Polinômio de Taylor de Ordem 2

O polinômio de Taylor de ordem 1 tem em comum com f o valor de x_0 e o valor da derivada em x_0.

Suponhamos que f tenha derivadas até a segunda ordem no intervalo I e seja x_0 pertencente à I. Devemos procurar o polinômio P, de grau no máximo 2, que tenha em comum com f o valor em x_0, o valor da primeira derivada em x_0 e valor da segunda derivada em x_0. Logo

$$f(x_0) = P(x_0), \qquad f'(x_0) = P'(x_0), \qquad f''(x_0) = P''(x_0).$$

Podemos procurar P da forma que

$$P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 . \qquad (2.7)$$

Como $P(x_0) = A_0$, então $A_0 = f(x_0)$. Note que

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0),$$

e ainda

$$P''(x) = 2A_2.$$

Então $P'(x_0) = A_1$ e $P''(x_0) = 2A_2$. Portanto, devemos ter

$$A_1 = f'(x_0)$$

e

$$A_2 = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

Substituindo em (2.7) temos que o polinômio procurado é

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2. \qquad (2.8)$$

O polinômio (2.8) denomina-se polinômio de Taylor, de ordem 2, de f em volta de x_0. Note que, para x próximo de x_0 os gráficos de f e P apresentam concavidades com mesmo sentido. É razoável esperar que para x suficientemente próximo de x_0 o polinômio de Taylor de ordem 2 aproxime melhor f do que o polinômio de Taylor de ordem 1. Porém, provaremos isso com o erro do polinômio de Taylor de ordem 2, que é apresentado no próximo teorema:

Teorema. Seja f derivável até a terceira ordem no intervalo I e sejam x, x_0 pertencentes à I. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x e x_0 tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(\bar{x})}{3!}(x - x_0)^3.$$

Demonstração: Queremos mostrar que

$$\mathrm{E(x)} = \frac{f'''(\bar{x})}{3!}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)^3$$

Note que $E(x_0) = E'(x_0) = E''(x_0) = 0$ e $E'''(x) = f'''(x)$.

Sendo $h(x) = (x - x_0)^3$, $h(x_0) = h'(x_0) = h''(x_0) = 0$ e $h'''(x) = 6 = 3!$.

Temos

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E(x) - E(x_0)}{h(x) - h(x_0)}$$

Pelo teorema de Cauchy, existe $\overline{x_1}$ no intervalo de extremos x_0 e x tal que

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E'(\overline{x_1})}{\mathrm{h}'(\overline{x_1})}$$

Tendo em vista que $E'(x_0) = h'(x_0) = 0$

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E'(\overline{x_1}) - E'(x_0)}{h'(\overline{x_1}) - g'(x_0)}$$

Pelo Teorema de Cauchy, existe $\overline{x_2}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e $\overline{x_1}$ tal que

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E'''(\overline{x_2})}{h'''(\overline{x_2})}$$

De $E(x_0) = h''(x_0) = 0$ segue:

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E''(\overline{x_2}) - E''(x_0)}{h''(\overline{x_2}) - h''(x_0)}$$

Novamente, pelo Teorema de Cauchy, existe $\bar{x}$ entre $\overline{x_2}$ e x_0 tal que

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E'''(\bar{x})}{h'''(\bar{x})}$$

Como $E'''(\bar{x})$= $f'''(\bar{x})$= $h'''(\bar{x}) = 3!$, temos que

$$E(x) = \frac{f'''(\overline{x})}{3!}(x - x_0)^3. \qquad (2.9)$$

Polinômio de Taylor de Ordem n

Seja f uma função real de uma variável, derivável até a ordem n no intervalo I e seja $x_0 \in I$. O polinômio

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{2.10}$$

ou

$$P(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

denomina-se polinômio de Taylor, de ordem n, de f em volta de x_0.

Fórmula de Taylor com resto de Lagrange

Teorema: Seja f uma função real de uma variável, derivável até a ordem $n + 1$ no intervalo I e sejam x, x_0 pertencentes à I. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x e x_0 tal que

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)} \tag{2.11}$$

onde

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Demonstração: Suponha $x_0 < x$ (se $x < x_0$, o procedimento é análogo). Tome $F: [x_0, x] \to \mathbb{R}$ definida por, para todo $y \in [x_0, x]$:

$$F(y) = f(x) - f(y) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k - A(x-y)^{n+1},$$

onde $A \in \mathbb{R}$ é escolhido de forma que $F(x_0) = 0$.

Tem-se: F é contínua em $[x_0, x]$ e derivável em $]x_0, x[$ (por hipótese), e $F(x) = F(x_0) = 0$. Então, pelo Teorema de Rolle, existe $\bar{x} \in]x_0, \mathrm{x}[$ tal que $F'(\bar{x}) = 0$. Mas, para todo $y \in]x_0, x[$.

$$F'(y) = -f'(y) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}(x-y)^k - \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!}(x-y)^{k-1}$$

$$+ (n+1)A\,(x-y)^n$$

$$F'(y) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n + (n+1)A(x-y)^n.$$

Como $\bar{x} \neq x$ e $F'(\bar{x}) = 0$ temos que

$$0 = -\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{n!}(\mathrm{x}-\bar{x})^{\mathrm{n}} + (\mathrm{n}+1)\mathrm{A}(\mathrm{x}-\bar{x})^{\mathrm{n}},$$

concluindo que $A = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}$, portanto de (2.11) segue-se de $F(x_0) = 0$.

O número e é irracional

Para demonstrar a irracionalidade de e, será provado o lema a seguir:

Lema:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \cdots \tag{2.12}$$

Demonstração: Do polinômio de Taylor temos que

$$f(x) = f(x_0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

No caso particular de $f(x) = e^x$, em torno da origem (ou seja, $x_0 = 0$), temos

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

Sabe-se que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x$ e em particular para $x_0 = 0$ tem-se $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Substituindo no polinômio de taylor de ordem n temos que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{q!} + \cdots \tag{2.13}$$

Substituindo $x = 1$ em (2.13) demonstra-se o lema.

Teorema: O número e é irracional.

Demonstração: É demonstrado do lema anterior que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \cdots \qquad (2.14)$$

Suponhamos que e fosse racional; assim existiriam inteiros positivos a e b tais que $e = \frac{a}{b}$, suponha ainda que $mdc(a, b) = 1$. Para todo natural n,

$$e > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

e ainda,

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Daí, para todo natural n,

$$0 < \frac{a}{b} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)!}$$

Para $n > b$ e $n \geq 3$, temos

$$0 < \frac{an!}{b} - n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)!} \geq \frac{3}{4}$$

Sejam $A = \frac{an!}{b}$ e $B = n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$. Note que A é inteiro pois $n > b$ e b é natural. Note também que B é inteiro pois n é natural e todos os termos dos denominadores são naturais.

Assim, $A - B$ é um inteiro estritamente positivo e menor que $\frac{3}{4}$, o que é impossível. Logo, e é irracional.

Considerações Finais

Polinômios são funções fáceis de manipular, já que os seus valores podem ser obtidos através de simples adições e multiplicações. Portanto, buscar aproximar funções mais complicadas por funções polinomiais é uma ideia muito inteligente. E com a fórmula de Taylor seguindo as condições necessárias podemos fazer isso com um número relativamente grande de funções.

Aproximando as funções mais complicadas para funções polinomiais podemos enumerar uma série de aplicações que esse utensílio ajudaria como em encontrar pontos máximos e mínimos de uma função, demonstrar porque o número e é um número irracional e demonstrar o teorema do confronto (um dos teoremas mais importantes do cálculo).

Visto isso, temos que é a fórmula de Taylor é muito importante e útil para muitas áreas da matemática. Como foi visto no exemplo de demonstrar a irracionalidade do número e.

Referências

GUIDORIZZI, H. L . **Um curso de cálculo Vol. 1** . São Paulo. 2011.

KARAS, E.W.; RIBEIRO, A. A. **Otimização Contínua-Aspectos teóricos e computacionais.** São Paulo. 2013.

TERRA, G. **Fórmulas de Taylor - Notas Complementares ao Curso de Cálculo I**. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~glaucio/textos/FormulasDeTaylor.pdf >. Acesso em: 18 ago. 2018.

A TRANSFORMADA DE LAPLACE

Aline de Oliveira Sant'anna[9]

Muitos problemas práticos de Engenharia envolvem sistemas mecânicos ou elétricos sob a ação de forças descontinuas ou de impulsos. Um método adequado para esses problemas baseia-se na transformada de Laplace. Vamos descrever como esse método funciona, mostrando problemas típicos das aplicações de engenharia.

Definição da Transformada de Laplace

Integrais Impróprias

Como a transformada de Laplace envolve uma integral de zero a infinito, é necessário conhecimento sobre integrais impróprias deste tipo para apreciar o desenvolvimento subsequente das propriedades da transformada. Vamos fornecer aqui uma revisão rápida de tais integrais impróprias.

Uma integral imprópria em um intervalo limitado é definida como um limite de integrais em intervalos finitos, assim

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(t)dt$$

onde A é um número real positivo. Se a integral de a até A existe para todo $A > a$ e se existir limite quando $A \to \infty$, diz-se que a

[9] Ex-Acadêmica do Instituto Federal Catarinense – *Campus* Camboriú. licaolive@gmail.com.

integral imprópria converge para esse valor- limite. Caso contrário, a integral diverge ou não existe.

Exemplo 1: Seja $f(t) = e^{ct}$, $t \geq 0$, onde c é uma constante real não nula. Então

$$\int_0^{\infty} e^{ct}\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{ct} dt$$
$$= \lim_{A\to\infty} \left[\frac{e^{ct}}{c}\right]_0^A$$
$$= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{c}(e^{cA} - e^{c\cdot 0})$$

Segue que a integral imprópria converge para o valor de $-\frac{1}{c}$ se $c < 0$, e diverge se $c > 0$. Se $c = 0$ o integrando $f(t)$ é uma função constante igual a 1, e a integral novamente diverge.

Exemplo 2: Seja $f(t) = \frac{1}{t}$, $t \geq 1$ Então

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dt}{t} = \lim_{A\to\infty} ln\, A$$

Logo, a integral imprópria diverge.

Exemplo 3: Seja $f(t) = t^{-p}$, $t \geq 1$ onde p é uma constante real e $p \neq 1$. O caso $p = 1$ foi considerado no Exemplo 2.

$$\int_1^{\infty} t^{-p}\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_1^A t^{-p} dt$$
$$= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{1-p}(A^{1-p} - 1)$$

Quando $A \to \infty$, $A^{1-p} \to 0$ se $p > 1$, mas $A^{1-p} \to \infty$ se $p < 1$. Portanto, $\int_1^\infty t^{-p}\, dt$ converge para o valor $\frac{1}{1-p}$ para $p > 1$, mas diverge, levando em conta o resultado do exemplo 2, para $p \leq 1$. (BOYCE e DIPRIMA, 2013)

Função Seccionalmente Contínua

Uma função é dita seccionalmente contínua ou contínua por partes em um intervalo $\alpha < t < \beta$ se o intervalo puder ser divido por um numero finito de pontos $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ de modo que:

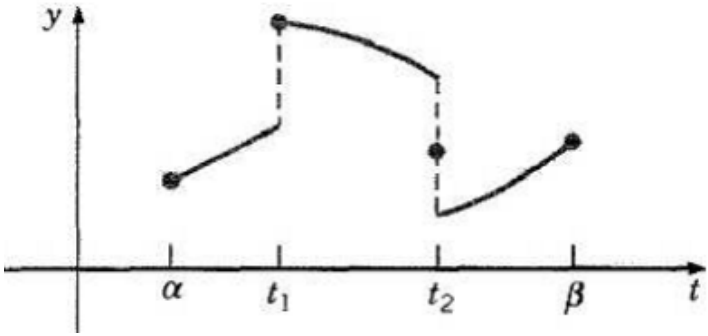
1. f seja contínua em cada subintervalo aberto $t_{i-1} < t < t_i$;
2. f tenda a um limite finito quando os pontos do subintervalo tenderem aos pontos extremos do próprio intervalo.

Em outras palavras, f é seccionalmente continua em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se for contínua exceto por um número finito de descontinuidades do tipo salto. Se f for seccionalmente continua em $\alpha \leq t \leq \beta$ para todo $\beta > \alpha$, então, diz-se que f é seccionalmente continua para $t \geq \alpha$.

A Integral de uma função seccionalmente continua em um intervalo finito é simplesmente a soma das integrais nos subintervalos criados pelos pontos da partição. Por exemplo, para a função $f(t)$ na figura 3.1 temos

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_a^{t_1} f(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt + \int_{t_2}^{\beta} f(t)dt \qquad (3.1)$$

Figura 3.1 - Tangente a um ponto



Fonte: Boyce e Diprima (2013).

Para a função da figura 3.1 atribuímos valores para a função nos extremos α e β e nos pontos de partição t_1 e t_2. No entanto para as integrais na Equação 3.1, não importa se a função $f(t)$ está definida nesses pontos, ou quais os valores atribuídos a $f(t)$ neles. Os valores das integrais na Equação 3.1 permanecem os mesmos.

Logo, se f for seccionalmente continua no intervalo $a \geq t \geq A$, a integral $\int_a^A f(t)dt$ existe. Portanto, se f for seccionalmente continua para $t > a$, então $\int_a^A f(t)dt$ existe para todo $A > a$. No entanto a continuidade por partes não é suficiente para garantir a convergência da integral imprópria $\int_a^A f(t)dt$, como mostram os exemplos precedentes.

Teorema 3.1: Se f for seccionalmente continua para $t \geq a$, se $|f(t)| \leq g(t)$ quando $t \geq M$ para alguma constante positiva M e se $\int_M^\infty g(t)dt$ converge, então $\int_a^\infty f(t)dt$ também converge. Por outro lado, se $f(t) \geq g(t) \geq 0$ para $t \geq M$ e se $\int_M^\infty g(t)dt$ diverge, então $\int_a^\infty f(t)dt$ também diverge.

A demonstração deste resultado de Cálculo não será dada aqui. Ele se torna plausível, no entanto, se compararmos as áreas representadas por $\int_M^\infty g(t)dt$ e por $\int_M^\infty |f(t)|dt$.

As funções mais úteis para efeito de comparação são e^{ct} e e^{t-p} que consideramos nos exemplos 1, 2 e 3. (BOYCE e DIPRIMA, 2013)

Transformadas Integrais

Uma Transforada Integral é uma relação da forma

$$F(s) = \int_\alpha^\beta K(s,t)f(t)dt \tag{3.2}$$

onde $K(s,t)$ é uma função dada chamada de núcleo da transformação, e os limites de integração α e β também são dados. A relação 3.2 transforma uma função f em outra função F, que é chamada *Transformada de* f.

A Transformada de Laplace é uma transformação integral, e é definida da seguinte maneira: Suponha que $f(t)$ é uma função definida para $t \geq 0$ e que f satisfaz certas condições. Então a Transformada de Laplace de f, que denotaremos por $L\{f(t)\}$ ou $F(s)$ é definida pela equação

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{3.3}$$

sempre que a integral imprópria convergir. A Transformada de Laplace usa um núcleo $K(s,t) = e^{-st}$.

A ideia geral ao se usar a Transformada de Laplace para se resolver uma equação diferencial[10] é a seguinte:

1. Usar a relação 3.3 para transformar um problema de valor inicial para uma função desconhecida f no domínio dos t em um problema mais simples para F no domínio dos s;
2. Resolver esse problema algébrico para encontrar F;
3. Recuperar a função desejada de f de sua transformada F. Essa última etapa é conhecida como "inverter a transformada".

Teorema 3.2: Suponha que

1. f é seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t \leq A$, para qualquer A positivo;
2. $|f(t)| \leq K \cdot e^{at}$ quando $t \geq M$. Nesta desigualdade, K, a e M são constante reais, com K e M necessariamente positivos.

Então, a Transformada de Laplace $L\{f(t)\} = F(s)$ definida na equação 3.3 existe para $s > a$.

Demonstração: Para demonstrar esse teorema, iremos mostrar que a integral da Equação 3.3, converge para $s > a$.

Separando a integral impropria em duas partes temos

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^M e^{-st} f(t)dt + \int_M^\infty f(t)dt \qquad (3.4)$$

A primeira integral à direita do sinal da igualdade na equação 3.4 existe pela hipótese 1 do teorema; logo, a existência

[10] Equação Diferencial é o tipo de equação onde a incógnita é uma função de uma variável, e suas derivadas. (SOTOMAYOR, 1979)

de $F(s)$ depende da convergência da segunda integral. Pela hipótese 2, temos, para $t \geq M$

$$|e^{-st}f(t)| \leq Ke^{-st}e^{at} = Ke^{(a-s)t}$$

Assim, pelo Teorema 3.1, F(s) existe se $\int_M^\infty e^{(a-s)t}\,dt$ convergir.

Pelo Exemplo 1, com $a - s$ no lugar de c, vemos que essa última integral converge quando $a - s < 0$, o que demonstra o Teorema 3.2.

Exemplo 4: Seja $f(t) = 1$, $t\backslash geq$ 0.

$$\begin{aligned} L\{1\} &= \int_0^\infty e^{-st}dt \\ &= -\lim_{A\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^A \\ &= \frac{1}{s}, \text{se } s > 0 \end{aligned}$$

Exemplo 5: Seja $f(t) = e^{at}$, $t > 0$.

$$\begin{aligned} L\{e^{at}\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt \\ &= \int_0^\infty e^{(-s+a)t}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt \\ &= \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-(s-a)t}dt \end{aligned}$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^A$$
$$= \lim_{A\to\infty}\left[\frac{e^{-(s-a)A}}{-(s-a)} - \frac{e^{-(s-a)0}}{-(s-a)}\right]$$
$$= \lim_{A\to\infty}\left[\frac{e^{-(s-a)A}}{-(s-a)} - \frac{1}{-(s-a)}\right]$$
$$= 0 - \frac{1}{-(s-a)}$$
$$= \frac{1}{s-a}, \text{com } s > a$$

Exemplo 6: Seja $f(t) = \sin(at)\,, s > 0$.

$$L\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st}\sin(at)\,dt$$
$$= \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\sin(at)\,dt$$

` Integrando por partes, obtemos

$$F(s) = \lim_{A\to\infty}\left[\left[-\frac{e^{-st}\cos(at)}{a}\right]_0^A - \frac{s}{a}\int_0^A e^{-st}\cos(at)\,dt\right]$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\cos(at)\,dt$$

Uma segunda integral por partes fornece

$$F(s) = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}F(s)$$

Portanto, para $F(s)$, temos:

$$F(s) = \frac{a}{s^2+a^2}, \text{com } s > 0.$$

Exemplo 7: Encontre a Transformada de Laplace de $f(t) = 5e^{-2t} - 2\sin(4t)\,, t \geq 0$.

Em primeiro lugar, devemos usar o fato de que a Transformada de Laplace é um operador linear, ou seja, dada uma transformada $L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\}$, podemos separá-la em $c_1 L\{f_1(t)\} + c_2 L\{f_2(t)\}$. Assim

$$L\{f(t)\} = 5L\{e^{-2t}\} - 3L\{\sin(4t)\}$$

Usando os exemplos 5 e 7, temos

$$L\{f(t)\} = \frac{5}{s+2} - \frac{12}{s^2+16}, \text{com } s > 0.$$

Soluções de Problemas de Valores Iniciais

Vamos mostrar como a transformada de Laplace pode ser usada para resolver problemas de valor inicial para equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. A utilidade da transformada de Laplace nesse contexto reside no fato de que a transformada de f' está relacionada de maneira simples à transformada de f. Esta relação está explicitada no teorema a seguir.

Teorema 3.3: Suponha que f é contínua e que f' é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \leq t \leq A$. Suponha, além disso, que existem constantes k,a e M tais que $|f(t)| \leq ke^{at}$ para $t \geq M$. Então $|f(t)|$ existe para $s > a$ e além disso,

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

Para provar este teorema vamos considerar a integral

$$\int_{o}^{A} e^{-st} f'(t)dt$$

Se f' tem pontos de descontinuidades em um intervalo $0 \leq t \leq A$, vamos denotá-los por $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Podemos então escrever essa integral como

$$\int_{o}^{A} e^{-st} f'(t)dt = \int_{o}^{t_1} e^{-st} f'(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t)dt + \cdots + \\ + \int_{o}^{A} e^{-st} f'(t)dt$$

Integramos cada parcela à direita do sinal de igualdade por partes, obtemos

$$\int_{o}^{A} e^{-st} f'(t)dt = e^{-st} f(t)]_{0}^{t_1} + e^{-st} f(t)]_{t_1}^{t_2} + \cdots + e^{-st} f(t)]_{t_n}^{A}$$

$$+s\left[\int_{o}^{t_1} e^{-st} f(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t)dt + \cdots + \int_{o}^{A} e^{-st} f(t)dt\right]$$

Como f é contínua, as contribuições em $t_1, t_2, \cdots, t_n$ das parcelas integradas se cancelam. Combinando as integrais, obtemos

$$\int_{0}^{A} e^{-st} f'(t)dt = e^{-sA} f(A) - f(0) + s\int_{0}^{A} e^{-st} f(t)dt$$

Para $A \geq M\$$, temos $|f(A)| \leq ke^{aA}$; em consequência, $|e^{-sA}f(A)| \leq ke^{-(s-a)A}$. Portanto, $e^{-sA}f(A) \to 0$ quando $A \to \infty$ sempre que $s > a$. Logo, para $s > a$

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

o que prova o teorema.

Se f' e f'' satisfazem as mesmas condições impostas em f e f' respectivamente no teorema 3.3, então a Transformada de Laplace de f'' também existe para $s > a$, e é dada por

$$L\{f''(t)\} = s^2L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

De fato desde que a função f e suas derivadas satisfaçam condições adequadas pode-se obter uma expressão para n-ésimas derivadas $f^{(n)}$ através de aplicações sucessivas desse teorema. O resultado é dado no teorema a seguir:

Corolário 3.1: Suponha que as funções $f, f', \cdots, f^{n-1}$ são contínuas e que f^n é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \leq t \leq A$. Suponha além disso que existem constantes K, a e M tais que $|f(t)| \leq Ke^{at}$, $|f'(t)| \leq Ke^{at}, \cdots, \left|f^{(n-1)}(t)\right| \leq Ke^{at}$ para todo $t \geq M$. Então, $L\{f^n(t)\}$ existe para $s > a$ e é dado por

$$L\{f^n(t)\} = s^nL\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$$

Vamos mostrar agora, como a Transformada de Laplace pode ser usada para resolver problemas de valor inicial. Sua utilidade maior é como ferramenta para a solução de problemas envolvendo equações diferenciais não homogêneas, como mostraremos mais adiante. Entretanto vamos começar olhando algumas equações homogêneas, que são um pouco mais simples.

Exemplo 8: Vamos considerar a equação diferencial

$$y'' - y' - 2y = 0$$

com condições iniciais $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

A equação característica é

$$r^2 - r - 2 = (r - 2)(r + 1) = 0$$

Em consequência, a solução geral é

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

Para satisfazer as condições iniciais, precisamos ter $c_1 + c_2 = 1$ e $-c_1 + 2c_2 = 0$. Logo, resolvendo o sistema, temos $c_1 = \frac{2}{3}$ e $c_2 = \frac{1}{3}$ de modo que a solução do problema de valor inicial é

$$y = \phi(t) = \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t} \tag{3.5}$$

Vamos agora resolver o mesmo problema usando a Transformada de Laplace. Para fazer isso precisamos supor que o problema tem uma solução $y = \phi(t)$ tal que as duas primeiras derivadas satisfaçam as condições do Corolário 3.1. Então, calculando a transformada de Laplace da equação diferencial, obtemos

$$L\{y''\} - L\{y'\} - 2L\{y\} = 0$$

onde usamos a linearidade da transformada para escrever a transformada de uma soma como a soma das transformadas separadas.

Usando o Corolário 3.1 para exprimir $L\{y''\}$ e $L\{y'\}$ em função de $L\{y\}$, a equação fica

$$s^2\, L\{y\} - sy(0) - y'(0) - [sL\{y\} - y(0)] - 2L\{y\} = 0,$$

ou

$$(s^2 - s - 2)Y(s) + (1 - s)y(0) - y'(0) = 0 \qquad (3.6)$$

onde $Y(s) = L\{y\}$. Substituindo os valores de $y(0)$ e $y'(0)$ dados pelas condições iniciais e depois resolvendo para $Y(s)$, obtemos

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)}$$

Obtemos assim, uma expressão para a transformada de Laplace $Y(s)$ da solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial dado. Para determinar a função ϕ, precisamos encontrar a função cuja transformada de Laplace é $Y(s)$.

Isso pode ser feito mais facilmente expandindo-se a expressão à direita do sinal da igualdade em frações parciais. Escrevemos então

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s+1}$$

$$= \frac{a(s+1) + b(s-2)}{(s-2)(s+1)}$$

onde os coeficientes a e b tem que ser determinados. Igualando os numeradores da segunda com a quarta expressão, obtemos

$$\mathrm{s} - 1 = \mathrm{a}(\mathrm{s} + 1) + \mathrm{b}(\mathrm{s} - 2)$$

uma equação que tem que ser satisfeita para todos os valores de s. Em particular, fazendo $s = 2$, tem-se $a = \frac{1}{3}$. Analogamente, tem-se $s = 1$, $b = 2$. Substituindo esses valores para a e b respectivamente, temos

$$Y(s) = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1} \tag{3.7}$$

Finalmente, temos que $\frac{1}{3}e^{2t}$ tem transformada $\frac{1}{3}(\mathrm{s}-2)^{-1}$. Analogamente, a transformada de $\frac{2}{3}e^{2t}$ é $\frac{2}{3}(s+1)^{-1}$.Portanto, pela linearidade da transformada de Laplace,

$$y = \phi(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$$

tem como transformada 3.7 e é, portanto, solução do problema de valor inicial desse exemplo. Note que ele satisfaz às condições do Corolário 3.1, como supusemos inicialmente. É claro que essa é a mesma solução que obtivemos antes.

O mesmo procedimento pode ser aplicado a equações lineares gerais de segunda ordem com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = f(t) \tag{3.8}$$

Supondo que a solução $y = \phi(t)$ satisfaz as condições do Corolário 3.1 para $n = 2$, podemos calcular a transformada da equação 3.8 obtendo, assim

$$a[s^2\,Y(s) - sy(0) - y'(0)] + b[sY(s) - y(0)] + cY(s) = F(s) \tag{3.9}$$

onde $F(s)$ é a transformada de $f(t)$. Resolvendo a equação 3.9 para $Y(s)$, encontramos

$$Y(s) = \frac{(as+b)y(0) + ay'(0)}{as^2 + bs + c} + \frac{F(s)}{as^2 + bs + c} \qquad (3.10)$$

O problema, então, está resolvido, desde que possamos encontrar a função $y = \phi(t)$ cuja transformada é $Y(s)$.

Podemos então listar algumas características essenciais do método da transformada. Em primeiro lugar, a transformada $Y(s)$ da função desconhecida $y = \phi(\mathrm{t})$ é encontrada resolvendo-se uma *equação algébrica* em vez de uma *equação diferencial*, a equação 3.6 em vez da equação 3.3. Essa é a chave da utilidade da transformada de Laplace para resolver equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes - o problema é simplificado de uma equação diferencial para uma equação algébrica. A seguir, a solução satisfazendo as condições iniciais dadas é encontrada automaticamente, de modo que a tarefa de determinar os valores para as constantes arbitrarias na solução geral não aparece. Além disso, como indicado na equação 3.9, as equações não homogêneas são tratadas exatamente da mesma forma que as homogêneas; não é preciso resolver primeiro a equação homogênea correspondente. Por fim, o método pode ser aplicado da mesma forma para equações de ordem maior, desde que suponhamos que a solução satisfaz as condições do Corolário para o valor apropriado de n.

Observe que o polinômio $as^2 + bs + c$, no denominador da fração à direita do sinal da igualdade na equação 3.10 é precisamente o polinômio característico associado à 3.8. Como a expansão de $Y(s)$ em frações parciais para determinar $\phi(t)$ necessita de fatoração desse polinômio, a utilização da transformada de Laplace não evita a necessidade de se encontrar

as raízes da equação característica. Para equações de ordem maior do que dois, pode ser um problema algébrico difícil, especialmente se as raízes forem irracionais complexas.

A dificuldade maior que ocorre ao se resolver um problema de valor inicial pela técnica da transformada está na determinação da função $y = \phi(t)$ correspondente à transformada $Y(s)$. Esse problema é conhecido como problema da inversão da transformada de Laplace, $\phi(t)$ é chamada a transformada inversa correspondente a $Y(s)$ e o processo de encontrar $\phi(t)$ a partir de $Y(s)$ é conhecido como inverter a transformada. Usamos, também, a notação $L^{-1}\{Y(s)\}$ para denotar a transformada inversa de $Y(s)$. Existe uma fórmula geral para a transformada de Laplace inversa, mas ela precisa de familiaridade com a teoria de funções de uma variável complexa, e não vamos considera-la aqui. No entanto, ainda é possível desenvolver muitas propriedades importantes da transformada de Laplace e resolver muitos problemas interessantes sem utilizar variáveis complexas.

Ao resolver o problema de valor inicial, não consideramos o problema da possível existência de outras funções, além da dada pela equação 3.5 que também tenham a transformada 3.7.

Pode-se mostrar que se f e g são funções contínuas com a mesma transformada de Laplace, então f e g são idênticas. Por outro lado, se f e g são seccionalmente contínuas, elas podem deferir em um ou mais pontos de descontinuidade e ainda terem a mesma transformada de Laplace. Essa falta de unicidade da transforada de Laplace inversa para funções seccionalmente contínuas, não tem importância pratica nas aplicações.

Então existe, essencialmente, uma bijeção entre as funções e suas transformadas de Laplace. Esse fato sugere a compilação de uma tabela, que fornece as transformadas das funções encontradas com mais frequência e vice-versa. As funções na segunda coluna da Tabela 3.1 são as transformadas

das funções na primeira coluna. Talvez mais importantes que as funções na primeira coluna são as transformadas inversas na segunda coluna. Assim por exemplo, se a transformada da solução de uma equação diferencial é conhecida, a solução pode ser encontrada, muitas vezes, olhando-se simplesmente na tabela.

Tabela 3.1 – Transformadas de Laplace e Transformadas Inversas

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s} \quad s > 0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad s > a$
3. $t^n; n =$ $inteiro\ positivo$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$
4. $t^p; p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{n+1}} \quad s > 0$
5. $\operatorname{sen} at$	$\frac{a}{s^2 - a^2} \quad s > o$
6. $\cos at$	$\frac{s}{s^2 - a^2} \quad s > o$
7. $\operatorname{senh}\ at$	$\frac{a}{s^2 - a^2} \quad s > \lvert a \rvert$
8. $\cosh\ at$	$\frac{s}{s^2 - a^2} \quad s > \lvert a \rvert$
9. $e^{at}\ \operatorname{sen} bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2} \quad s > a$

10. $e^{at}\ \cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \qquad s>a$

Fonte: Boyce e Diprima (2013, p.248).

Transformadas e transformadas inversas também podem ser encontradas através da utilização de sistemas algébricos computacionais.

Com frequência, uma transformada de Laplace $F(s)$ pode ser expressa como uma soma de diversas parcelas.

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s)$$

Suponha que $f_1(t) = L^{-1}\{F_1(s)\}, \ldots, f_n(t) = L^{-1}\{F_n(s)\}$. Então a função

$$f(t) = f_1(t) + \cdots + f_n(t)$$

tem transformada de Laplace $F(s)$. Pela unicidade enunciada anteriormente, não existe outra função contínua f tendo a mesma transformada. Assim

$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\{F_1(s)\} + \cdots + L^{-1}\{F_n(s)\};$$

ou seja, a transformada de Laplace inversa também é um operador linear.

É conveniente, em muitos problemas, usar essa propriedade decompondo uma transformada de uma soma de funções cujas transformadas inversas já são conhecidas ou podem ser encontradas em uma tabela. Expansões em frações parciais são particularmente úteis nesse contexto, e um resultado geral cobrindo muitos casos.

Exemplo 9: Encontre a solução da equação diferencial

$$y'' + y' = \sin(2t)$$

satisfazendo as condições iniciais

$$y(0) = 2 \qquad y'(0) = 1$$

Vamos supor que este problema de valor inicial tem uma solução $y = \phi(t)$ com duas primeiras derivadas satisfazendo as condições do Corolário 3.1. Então calculando a transformada de Laplace da equação diferencial, temos

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

onde a transformada de $\sin(2t)$ foi obtida da Tabela 3.1. Substituindo $y(0)$ e $y'(0)$ pelos valores dados nas condições iniciais e resolvendo para $Y(s)$, obtemos

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

Usando frações parciais, podemos escrever $Y(s)$ na forma

$$Y(s) = \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 4}$$

$$= \frac{(as + b)(s^2 + 4) + (cs + d)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

Expandindo o numerador da fração á direita do segundo sinal de igualdade e igualando ao numerador na equação acima, encontramos

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (a + c)s^3 + (b + d)s^2 + (4a + c)s + (4b + d)$$

para todo s. Então, comparando os coeficientes de mesma potência de s, temos $a + c = 2$; $b + d = 1$; $4a + c = 8$ e $4b + d = 6$.

Em consequência, $a = 2$, $c = 0$, $b = \frac{5}{3}$ e $d = -\frac{2}{3}$, donde

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{5/3}{s^2 + 1} - \frac{2/3}{s^2 + 4}$$

Da tabela 3.1, a solução do problema de valor inicial dado é

$$y = \phi(t) = 2\cos(t) + \frac{5}{3}\sin(t) - \frac{1}{3}\sin(2t)$$

Exemplo 10: Encontre a solução do problema de valor inicial

$$\mathrm{y}^4 - \mathrm{y} = 0$$

sujeito a:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$$

Neste problema, precisamos supor que a solução $y = \phi(t)$ satisfaça as condições do Corolário 3.1 para $n = 4$. A transformada de Laplace da equação diferencial é

$$s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) - Y(s) = 0$$

Então, usando as condições iniciais, e resolvendo para $Y(s)$, temos

$$y(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1}$$

Uma expansão para frações parciais de $Y(s)$ é

$$Y(s) = \frac{as + b}{s^2 - 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 1}$$

e segue que

$$(as + b)(s\text{^}2 + 1) + (cs + d)(s\text{^}2 - 1) = s\text{^}2$$

para todo s. Fazendo $s = 1$ e $s = -1$, respectivamente, obtemos o par de equações

$$2(a + b) = 1, \quad 2(-a + b) = 1$$

e portanto, $a = 0$ e $b = 1/2$. Se fizermos $s = 0$, então $b - d = 0$, de modo que $d = 1/2$. Finalmente, igualando as parcelas contando as potências cúbicas nos dois lados da equação, encontramos que $a + c = 0$, e logo, $c = 0$. Assim

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s^2 - 1} + \frac{\frac{1}{2}}{s^2 + 1}$$

e, da Tabela 3.1, a solução do Problema de Valor Inicial é

$$y = \phi(t) = \frac{\sinh(t) + \sin(t)}{2}$$

Referências

BOYCE, William. E; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e problemas de valores de contorno.** 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

A UTILIZAÇÃO DE SOFTWARES NO CÁLCULO DE VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Cristiane Machado Pereira Felício[11]

Introdução

Este artigo propõe um experimento para os acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática, vivenciado na disciplina de Introdução a Análise Real, tendo a finalidade de apresentar uma atividade envolvendo alguns conceitos do volume de sólidos de revolução e uma aplicação prática de integrais definidas.

A proposta foi que os estudantes participassem efetivamente da apresentação da prática. No primeiro momento foram apresentados os conceitos de volume para um sólido de revolução em torno do eixo x e y e de um sólido qualquer.

No cotidiano de nossas atividades acadêmicas nos deparamos com inúmeras definições e demonstrações que geram situações onde nos questionamos sobre a importância em aprender certos conteúdos e qual a sua aplicação, nem sempre conseguindo encontrar uma resposta.

Visando oportunizar uma abordagem diferenciada para o ensino de sólidos de revolução, durante o desenvolvimento e a execução das atividades, os acadêmicos transformaram os conceitos aprendidos em um experimento prático.

Neste trabalho se almeja mostrar que além da aplicabilidade de integrais definidas, é necessário romper com a forma conservadora de ensinar esses conceitos, e também, com o auxílio tecnológico pode-se desfrutar o uso de softwares.

---

[11] Ex-Acadêmica do Instituto Federal Catarinense – *Campus* Camboriú; cristianemachadop@hotmail.com.

Apresentação do Tema

Os computadores estão sendo introduzidos de forma cada vez mais frequente em todos os níveis da educação. Sua utilização no ensino superior pode ter várias finalidades, tais como: fonte de informação; auxílio no processo de construção de conhecimento; um meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções.

Para esta aplicação foram utilizados três softwares livres: o Winplot, o Graph e o Dev C++.

O software Winplot foi utilizado para que os acadêmicos visualizem o seu sólido em três dimensões. Segundo Silva (2012.p 193):

> O software Winplot é um excelente programa gráfico, desenvolvido e administrado pelo professor Richard Parris, da Philips Exeter Academy. Trata-se de um programa inteiramente gratuito e interativo, que facilita o estudo de funções, simples de usar, pois aceita as funções matemática de modo natural, utiliza pouca memória e dispõe de outros vários recursos. Apresentando um dinamismo que contribui significativamente para o ensino de funções.

O software Dev-C++ foi utilizado para calcular o volume do sólido de revolução. O Dev-C++ engloba num único aplicativo todas as ferramentas necessárias para programar em C/C++. O pacote compõe um ambiente completo de desenvolvimento para a criação, debug e compilação do código de programação.

A aparência do Dev-C++ segue a tradição dos programas do gênero. A maior porção da tela está disponível para a edição de texto.

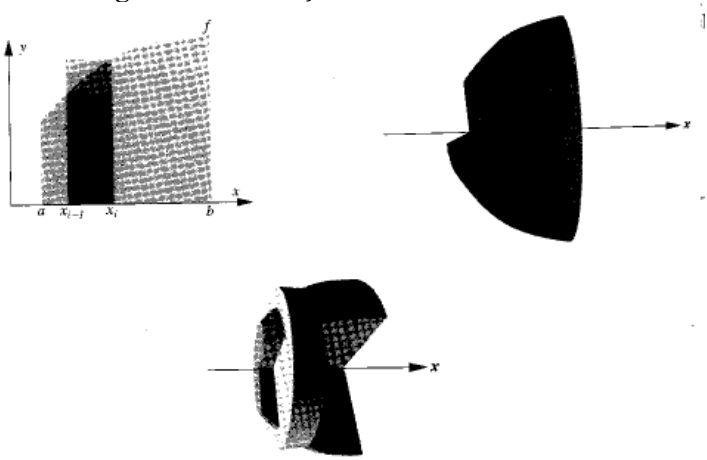
O software Graph foi utilizado no experimento para encontrar a curva de contorno. A interface do aplicativo é muito simples e disponibiliza botões para realizar operações básicas com apenas um clique. O Graph trabalha com funções padrão, paramétricas e polares.

Conceitos

Volume de sólido obtido pela rotação em torno do eixo x, de um conjunto A

Seja f contínua em $[a, b]$ com $f(x) \geq 0$, em $[a, b]$ seja B o conjunto obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto A do plano limitado pelas retas $x = a$ e $x = b$ pelo eixo x e pelo gráfico de $y = f\ (x)$. Estamos interessados em definir o volume de V em B.

Figura 4.1 - Rotação em torno do eixo x



Fonte: Guidorizzi (2010).

Seja $P = a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e, respectivamente, c_i e c_{i_2} pontos de mínimo e de máximo de f em $[x_{i-1}, x_i]$. Na figura 4.1 $c_i = x_{i-1}$ e $c_{i_2} = x$. Temos:

- $\pi[f(c_i)]^2 \Delta\, x_i =$ Volume do cilindro de altura $\Delta\, x_i$ e base de raio $f(c_i)$\$ (cilindro de "dentro");
- $\pi\left[f\left(c_{i_2}\right)\right]^2 \Delta\, x_i =$ Volume do cilindro de altura Δx_i e base de raio $f\ (c_{i_2})$ (cilindro de "fora").

Logo a definição do volume de V deverá implicar

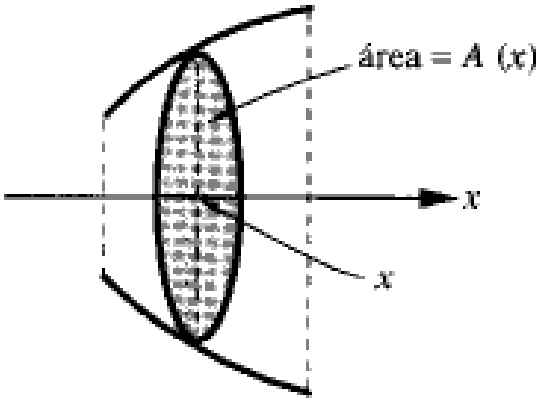
$$\sum_{i=1}^{n} \pi[f(c_i)]^2 \Delta x_i \leq \text{Volume} \leq \sum_{i=1}^{n} \pi\left[f\left(c_{i_2}\right)\right]^2 \Delta x_i$$

Para toda partição P de $[a, b]$. Para $\max \Delta x_i \to 0$, as somas de Riemenn que comparecem nas desigualdades tendem a $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$, deste modo o volume V de B é definido por: $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$ ou $V = \int_a^b \pi y^2 dx$, onde $y = f\ (x)$.

Volume de um sólido qualquer

Temos que $V = \int_a^b \pi y^2 dx$ é a fórmula que nos fornece o volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Observe que $A(x) = \pi[f(x)]^2$ é a área da interseção do sólido com o plano perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto de abcissa x.

Figura 4.2 - Sólido de Revolução



Fonte: Guidorizzi (2010).

Assim, o volume mencionado anteriormente pode ser colocado na forma

$$V = \pi \int_a^b A(x)dx$$

Seja, agora, B um sólido qualquer, não necessariamente de revolução e seja x um eixo escolhido arbitrariamente. Suponhamos que o sólido esteja compreendido entre dois planos perpendiculares a x, que interceptem o eixo x em $x = a$ e em $x = b$. Seja $A(x)$ a área da interseção do sólido com o plano perpendicular a x no ponto de abcissa x. Suponhamos que a função $A(x)$ seja integrável em $[a, b]$. Definimos, então, o volume do sólido por

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Aplicação

A proposta desta aplicação, consiste em realizar o cálculo do volume, através da rotação de uma curva representativa de contorno do mesmo, girando-o em torno de um eixo fixo. Para a realização deste experimento, escolheu-se uma embalagem, possível de ser medida em seu diâmetro e sua altura conforme Figura 4.3.

Figura 4.3 - Sólido escolhido – embalagem de fermento

Fonte: Kraisig (2014)

Na sequência os estudantes realizam as medidas, utilizando para isso o paquímetro. Durante a atividade foram necessários três softwares: Graph, Winplot e o Dev-C++, o Graph foi utilizado para a obtenção da curva de contorno mais adequada, enquanto o Winplot mostrou o sólido, o Dev-C++ o cálculo do volume através da integral definida.

Curva de Contorno

Com utilização do paquímetro e de uma fita métrica os acadêmicos obtiveram a medida do sólido escolhido, e a cada meio centímetro de altura eles encontraram a medida do diâmetro, determinando o raio em cada uma destas alturas. Para obter melhor precisão, as medições foram realizadas pelo menos duas vezes.

A seguir os resultados dessas medições foram organizados em tabelas. Foram obtidos 12 pontos do 0 ao 5,5. A Tabela 4.1 destaca a síntese dos resultados coletados.

Tabela 4.1 - Medidas do Objeto

Altura (cm)	Diâmetro (cm)	Raio (cm)
0	5,55	2,77
0,5	5,42	2,71
1	5,30	2,65
1,5	4,80	2,40
2	4,89	2,44
2,5	4,91	2,45

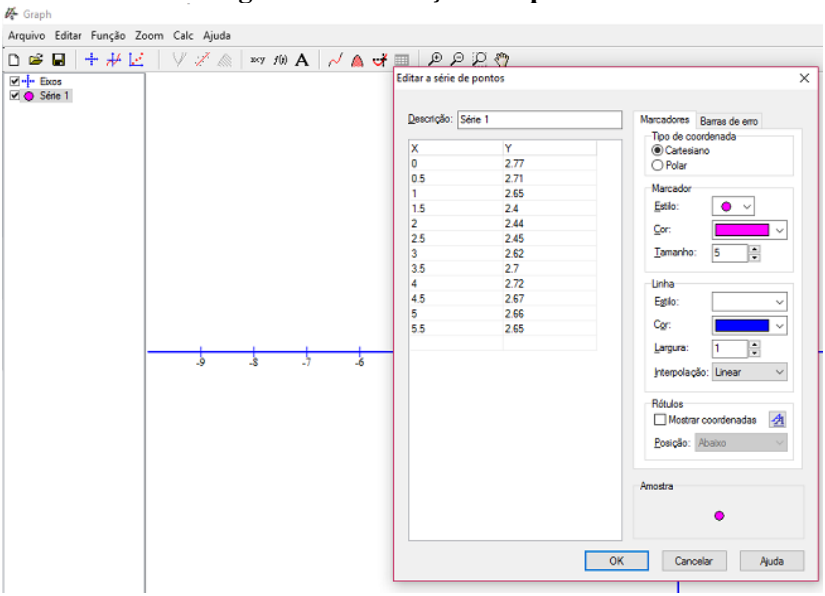
Fonte: Registro da autora.

Com os dados já registrados, o próximo passo foi determinar a curva de contorno mais adequada para o sólido.

Para encontrar a curva de contorno, foi necessário o uso de um software que permite a escolha da curva de contorno que melhor descrevesse os dados obtidos nas medições, apresentando o modelo matemático que determina esta curva. Os participantes constataram que geralmente estes modelos apresentam coeficientes não exatos, tornando-se bastante trabalhoso obtê-los manualmente.

O software Graph foi utilizado para encontrar a curva de contorno que melhor descreve os dados obtidos nas medições e, que apresente a função que determina esta curva.

Figura 4.4 - Inserção dos pontos



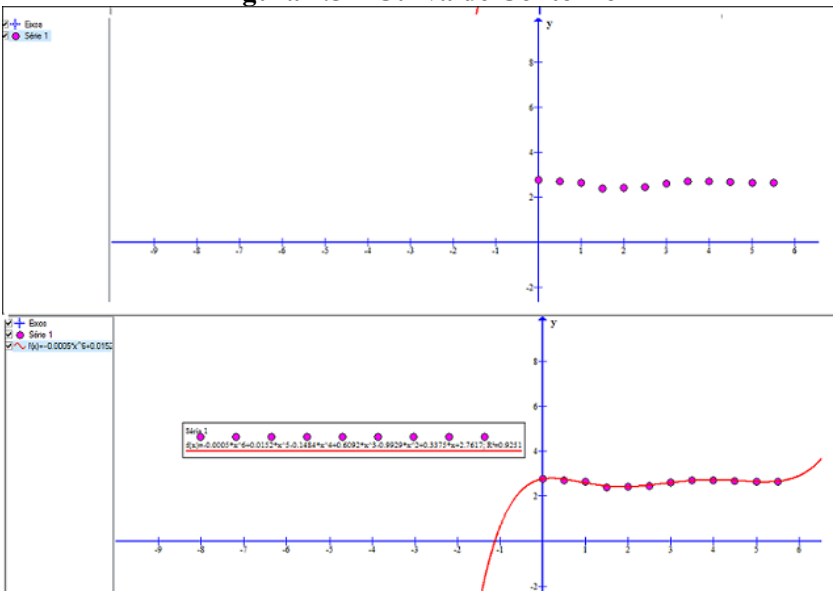
Fonte: Kraisig (2014)

No Software Graph foram inseridos os dados do sólido e, para isso, os acadêmicos seguiram os seguintes passos: acessar o menu Função; marcar Inserir Série de Pontos; e, seguir as orientações que são apresentadas pelo software, que indica onde deverão ser digitados os dados do sólido.

Estabeleceu-se a "variável x" representativa da altura e, "y a variável" representativa do raio. O software Graph foi utilizado para encontrar a curva de contorno que melhor descreve os dados obtidos nas medições e, que apresente a função que determina esta curva. Após inserir as informações referentes às

medidas encontradas no sólido e clicar em “OK”, aparecerá na tela à distribuição dos pontos conforme a Figura 4.5.

Figura 4.5 – Curva de Contorno



Fonte: Dados Primários (2016).

Para realizar a escolha da curva de contorno deve-se acessar o menu do software em Função e escolher a opção Inserir linha de tendência. Neste momento realizou-se uma discussão sobre o tipo de curva que deveria ser escolhida de forma que, melhor representasse os dados do sólido desejado.

Neste caso, a curva escolhida foi a polinomial de ordem seis, pois é fácil perceber que a distribuição dos pontos se assemelha a uma curva representativa de uma função de sexta ordem. Uma acadêmica sugeriu ao grupo para utilizar uma curva exponencial, sendo aceito por todos; porém, observou-se por

meio do software que não seria viável, porque a curva exponencial não era compatível com a curva do objeto.

A escolha e a determinação do modelo a partir do software se tornam bastante rápida e eficiente, podendo ser alterada quantas vezes for necessário, até chegar ao melhor modelo. Essa linha de tendência gerou a seguinte função $f(x) = -0.00050980392x^6 + 0.015226244x^5 - 0.14840875x^4 + 0.60920489x^3 - 0.99289577x^2 + 0.33745518x + 2.7117251$.

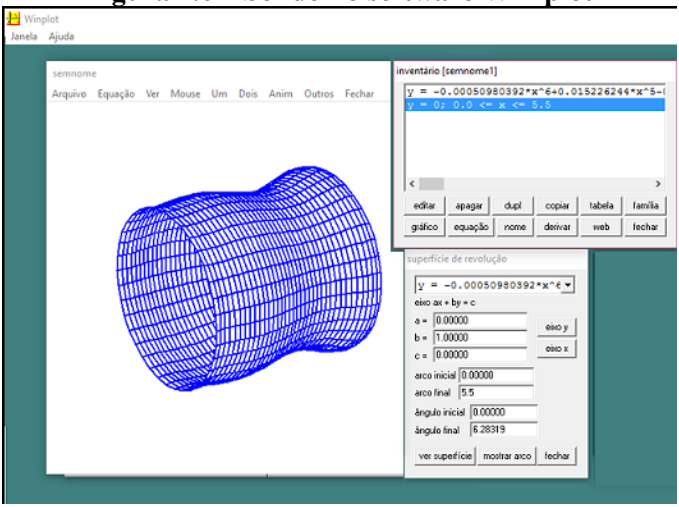
Cálculo do volume

Para o cálculo do volume do sólido considerou-se que a região limitada entre a curva e o intervalo de "0 a 5,5" faz uma revolução em torno de um eixo fixo, neste caso o eixo x. Deste modo, o volume do sólido gerado foi calculado pela equação

$$V = \pi \int_0^{5,5} [f(x)]^2 dx$$

onde $f(x)$ é a função encontrada no software Graph e o intervalo de integração $[0; 5,5]$ foi determinado nas medições que corresponde a altura considerada no objeto. O software Winplot gera a curva de contorno a partir da $f(x)$, e também possibilita gerar a superfície de revolução, mostrando com boa aproximação o formato do sólido como está sendo mostrado na Figura 4.6.

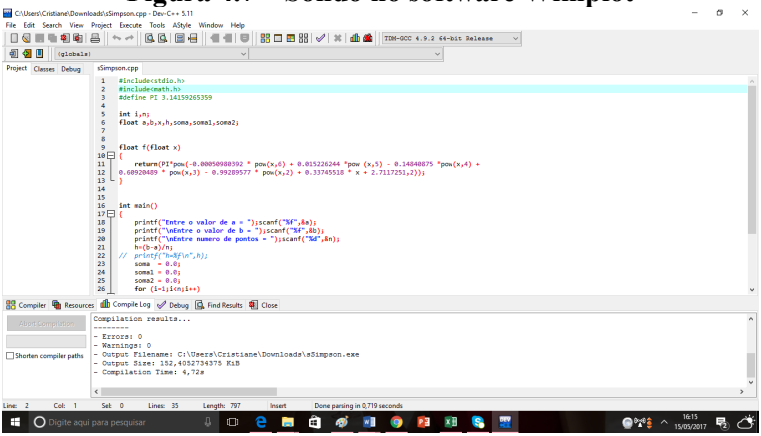
Figura 4.6 – Sólido no software Wimplot



Fonte: Dados Primários (2016).

Para calcular o volume do sólido de revolução foi utilizado o software Dev-C++; neste software, utilizamos um algoritmo como mostra na Figura 4.7.

Figura 4.7 – Sólido no software Wimplot



Fonte: Dados Primários (2016).

Para marcar o intervalo de integração, utilizou-se o intervalo de “0 a 5,5” conforme mostra a Figura 4.8.

Figura 4.8 – Algoritmo compilado

```
C:\Users\Cristiane\Downloads\sSimpson.exe
Entre o valor de a = 0

Entre o valor de b = 5.5

Entre numero de pontos = 12
Integral = 113.668404

--------------------------------
```

Fonte: Dados Primários (2016).

O volume do sólido foi calculado através da resolução da integral. Utilizando o software encontramos um volume de 113.66 cm^3, como a $f(x)$ é um polinômio de sexto grau, pode-se também calcular manualmente o volume do sólido.

Considerações Finais

Independentemente da atividade que realiza, o que move o homem são as necessidades, e elas só se efetivam quando ao encontrarem sua determinação no objeto, tornam-se os motivos que o impulsionam.

Ao considerar que o objeto da prática pedagógica deve ser a transformação do indivíduo no processo de apropriação dos conhecimentos e saberes construídos por um coletivo, atenta-se para a prática do professor buscando compreender quais as

necessidades ‘da disciplina / do conteúdo / do estudante’ ele tem procurado satisfazer.

Tendo esta preocupação, no desenvolvimento do trabalho existiu a motivação para a aprendizagem dos participantes, considerando a importância da atividade e participação de envolvidos. A atividade proporcionou um ambiente de estudo mais atraente, sendo vivenciada a aproximação do arcabouço teórico com a vivência prática, seguindo todas as etapas para a obtenção dos dados finais.

O cálculo da integral para muitos acadêmicos dos últimos períodos do curso já não é tão complexo como para os iniciantes, o que dificulta a aprendizagem muitas vezes são situações problemas onde o acadêmico tem que visualizar sólidos em três dimensões desenhados no quadro, sem utilizar a tecnologia (os softwares).

Segundo Kraisig (2014) é importante a realização de atividades como essas, para construir juntamente com os acadêmicos conceitos matemáticos ou simplesmente relembrá-los. Atividades como esta, fazem com que os estudantes consigam perceber que uma situação matemática vai além do caderno e encontra aplicabilidade em situações que a requerem.

Enfim, este trabalho se mostrou eficiente tanto no desenvolvimento do conteúdo como para mostrar a sua real importância.

Referências

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**: v.1, 5. ed. São Paulo: LTC, 2010.

KRAISIG, A. R.; WELTER, F. C. **Cálculo do Volume de um Sólido de Revolução**: uma atividade usando os softwares Graph

e Winplot. In: Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. p. 13-16, nov. 2014.

PIVA, C.; DORNELES, L.; SPILIMBERGO, A. P. Cálculo do Volume de um Sólido de Revolução: Uma Atividade Usando os Softwares Graph e WxMaxima. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 33., Águas de Lindóia, 2010. **Anais do CNMAC - ST17-Ensino**. Águas de Lindóia: SBMAC, 2010. p.137

SILVA. C. Adriano; SANTOS, V. Luciana; Soares, A.Willames. Utilização do Winplot como software educativo para o ensino de matemática. UPE-Campus Garanhuns; Revista Diálogos n.°6 – **Revista de Estudos Culturais e da Contemporaneidade** – UPE/Faceteg – Garanhuns/PE – 2012. 187 p.

EQUAÇÕES DIFERENCIAS PARCIAIS - PROBLEMAS DE AUTOVALORES - SÉRIES DE FOURIER

Filomena Teruko Tamashiro Arakaki[12]

Equações Diferenciais Parciais

Problemas de Valores de Contorno para Fronteiras com Dois Pontos

Muitas aplicações das EDP são lidadas com regiões limitadas que levam a um problema misto, ou seja, de valor inicial e de contorno.

A seguinte equação diferencial é um exemplo de equação parcial de problema de valores iniciais com condições apropriadas e um ponto dado.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \tag{5.1}$$

com condições iniciais

$$y(t_0) = y_0 \qquad y'(t_0) = y_0' \tag{5.2}$$

As condições chamadas condições de contorno são problemas cujo valor da variável dependente y ou de sua derivada é especificado em dois pontos diferentes, distinguindo das condições iniciais anteriormente especificadas.

Exemplo de equação diferencial.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{5.3}$$

[12] Ex-Acadêmica do Instituto Federal Catarinense – *Campus* Camboriú; filoteko@hotmail.com.

com condições de contorno

$$y(\alpha) = y_0 \qquad y(\beta) = y_1 \tag{5.4}$$

Na aplicação física, utiliza-se x em vez de t, como uma coordenada espacial (variável independente) apresentada nas equações 5.3 e 5.4.

Para solucionar o problema de valores de contorno 5.3 e 5.4 é necessário encontrarmos uma função $y = \phi(x)$ que satisfaça a equação diferencial 5.3 no intervalo $\alpha < x < \beta$ e que assuma os valores especificados em y_0 e y_1.

Normalmente procura-se a solução geral da equação diferencial e em seguida, as condições de contorno para determinar os valores das constantes arbitrárias.

Problemas de valores de contorno podem ser postos tanto em equações diferenciais não lineares como lineares. Uma classificação importante nas lineares é se elas são homogêneas ou não. É dita homogênea quando a função $g(x)$ for igual a zero, ou seja, valor nulo para todo x e os valores y_0 e y_1 também nulos.

Apesar da semelhança entre os problemas de valor inicial e de contorno, elas se diferenciam em relação as suas soluções. Sob as mesmas condições físicas, os problemas de valor inicial apresentam uma única solução enquanto que, os de contorno podem ter uma única solução como não ter e ter uma infinidade de soluções, assemelhando as equações algébricas lineares.

Exemplo 1:

$$y'' + 2y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y(\pi) = 0$$

Resolução: Substituindo a equação diferencial por uma equação característica encontramos as raízes:

$$m^2 + 2 = 0$$

$$m_1 = \sqrt{2}i \qquad m_2 = -\sqrt{2}i$$

Assim a solução geral da equação diferencial é:

$$y = c_1 \cos(\sqrt{2}x) + c_2 \sin(\sqrt{2}x)$$

Para $y = 1$, temos

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) \\ 1 &= c_1 \cdot (1) + c_2 \cdot (0) \\ c_1 &= 1 \end{aligned}$$

Para $y(\pi) = 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 \cos(\sqrt{2}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{2}\pi) \\ 0 &= 1 \cos(\sqrt{2}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{2}\pi) \\ -\cos(\sqrt{2}\pi) &= c_2 \sin(\sqrt{2}\pi) \\ c_2 &= -\cot(\sqrt{2}\pi) = -0{,}2762 \end{aligned}$$

Para satisfazer a primeira condição de contorno c_1 deve ser igual a 1 e a segunda condição de contorno, $c_2 = -\cot(\sqrt{2}\pi) = -0{,}2762$.

Logo, a solução do problema de valores de contorno é:

$$y = \cos(\sqrt{2}\pi) - \cot(\sqrt{2}\pi) \sin(\sqrt{2}\pi)$$

Este é um caso de problema de valores de contorno não homogêneo com uma única solução.

Exemplo 2:

$$y'' + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y(\pi) = a$$

Resolução: Utilizando uma equação característica encontramos as seguintes raízes:

$$m^2 + 1 = 0$$

$$m_1 = i \qquad m_2 = -i$$

A solução da equação diferencial é:

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

Para $y(0) = 1$, temos

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) \\ 1 &= c_1 \cdot (1) + c_2 \cdot (0) \\ c_1 &= 1 \end{aligned}$$

Para $y(\pi) = a$, temos

$$\begin{aligned} a &= c_1 \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) \\ a &= c_1 \cdot (-1) + c_2 \cdot (0) \\ c_1 &= -a \end{aligned}$$

Na primeira condição de contorno temos que $c_1 = 1$ e na segunda condição, $c_1 = -a$. As duas condições sobre c_1 são incompatíveis se $a \neq -1$, neste caso o problema não tem solução. Se $a = -1$, ambas as condições são satisfeitas, independente do valor de c_2. Neste caso existe uma infinidade de soluções, onde c_2 permanece arbitrário. Este problema de valores de contorno não homogêneo ilustra que pode não ter solução, como em condições especiais pode ter infinidade de soluções.

Exemplo 3:

$$y'' + 2y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$$

Resolução: Utilizando uma equação característica encontramos as seguintes raízes

$$m^2 + 2 = 0$$

$$m_1 = \sqrt{2}i \qquad m_2 = -\sqrt{2}i$$

Assim, a solução geral da equação diferencial é:

$$y = c_1 \cos\left(\sqrt{2}x\right) + c_2 \sin(\sqrt{2}x)$$

Para $y(0) = 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 \cos\left(\sqrt{2} \cdot 0\right) + c_2 \sin(\sqrt{2} \cdot 0) \\ 0 &= c_1 \cdot (1) + c_2 \cdot (0) \\ c_1 &= 1 \end{aligned}$$

Para $y(\pi) = 0$, temos

$$0 = c_1 \cos(\sqrt{2}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{2}\pi)$$

$$0 = 0 \cos(\sqrt{2}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{2}\pi)$$

$$c_2 \sin(\sqrt{2}\pi) = 0$$

A solução geral da equação diferencial é $y = 0$.

A primeira condição de contorno deve ser $c_1 = 0$ e a segunda, $c_2 \sin(\sqrt{2}\pi) = 0$. Como $\sin(\sqrt{2}\pi) \neq 0$ ($\sin(\sqrt{2}\pi) = 0{,}0774$), então $c_2 = 0$. Portanto, $y = 0$, para todo x. é a única solução do problema, desta forma confirmamos que um problema de valores de contorno homogêneo pode ter somente a solução trivial $y = 0$.

Exemplo 3:

$$y'' + y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$$

Resolução - Utilizando uma equação característica encontramos as seguintes raízes

$$m^2 + 1 = 0$$

$$m_1 = i \qquad\qquad m_2 = -i$$

A solução geral da equação diferencial é

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x).$$

Para $y(0) = 0$, temos

$$0 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)$$

$$0 = c_1 \cdot (1) + c_2 \cdot (0)$$

$$c_1 = 0$$

Para $y(\pi) = 0$, temos

$$0 = c_1 \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi)$$

$$0 = 0 \cdot (-1) + c_2 \sin(\pi)$$

$$c_2 \sin(\pi) = 0$$

Logo, a solução do problema de valores de contorno é $y = c_2 \sin(\pi)$.

Na primeira condição de contorno $c_1 = 0$ e na segunda, como $\sin(\pi) = 0$ a condição de contorno é satisfeita independente do valor de c_2. Um exemplo de problema de valores de contorno homogêneo que pode ter uma infinidade de soluções.

Problemas de Autovalores

Revendo a equação matricial

$$Ax = \lambda\, x$$

nota-se que, tem solução $x = 0$ para todo valor de λ, mas para determinados valores de λ, autovalores, existem valores não nulos chamados de autovetores.

Considerando a equação diferencial

$$y'' + \lambda y = 0$$

e as condições de contorno

$$y(0) = 0 \qquad\qquad y(\pi) = 0$$

Esse problema se assemelha ao Exemplo 3 se $\lambda = 2$, tendo como solução apenas trivial $y = 0$, e ao Exemplo 4, se $\lambda = 1$ tendo outras soluções não nulas. Os valores de λ, para soluções não triviais, são chamadas de autovalores e as soluções não triviais, de autofunções. Assim, $\lambda = 1$ é um autovalor do problema, enquanto que $\lambda = 2$ não. Qualquer múltiplo não nulo de $\sin(\pi)$ é uma autofunção correspondente ao autovalor $\lambda = 1$.

Para encontrarmos os autovalores e autofunções do problema genérico, vamos considerar os casos em que $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$.

Caso $\boldsymbol{\lambda > 0}$: A fim de evitar raízes quadradas, substituiremos λ por μ^2. Assim

$$y'' + \mu^2 y = 0$$

Utilizando uma equação característica encontramos as seguintes raízes

$$r^2 + \mu^2 = 0$$

$$r_1 = i\mu \qquad\qquad r_2 = -i\mu$$

A solução geral da equação diferencial é

$$y = c_1 \cos(\mu\, x) + c_2 \sin(\mu\, x)$$

Para $y\,(0) \;=\; 0$, temos

$$0 = \; c_1 \cos(\mu \cdot 0) + c_2 \sin(\mu \cdot 0)$$

$$c_1 = 0$$

Para $y\ (\pi) = 0$, temos

$$0 = c_1 \cos(\mu\ \pi) + c_2 \sin(\mu\ \pi)$$

$$0 = 0 \cdot \cos(\mu\ \pi) + c_2 \sin(\mu\ \pi)$$

$$c_2 \sin(\mu\ \pi) = 0$$

Para encontrarmos soluções não triviais, precisamos de $c_2 \neq 0$, e como $\sin(\pi) = 0$ e em todos os múltiplos inteiros de π, temos que encontrar valores para μ que mantenha $\sin(\mu\pi) = 0$, sendo assim podemos escolher qualquer μ inteiro (positivo). Os valores correspondentes de λ são os quadrados dos inteiros positivos

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9, \dots, \lambda_n = n^2, \dots$$

e são os autovalores do problema. As autofunções são dadas pela equação $y = c_1 \cos(\mu\ x) + c_2 \sin(\mu\ x)$ com $c_1 = 0$ e os múltiplos de $\sin(nx)$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ a constante c_2 nunca está determinada, tanto que as autofunções estão determinadas a apenas uma constante multiplicativa arbitrária, como os autovetores do problema matricial. Escolhe-se, a constante multiplicativa arbitrária como sendo 1 e escreve-se as autofunções como

$$y_1(1) = \sin(x), y_2(2) = \sin(2x), \dots, y_n(n) = \sin(nx), \dots$$

e os múltiplos dessas funções também são autofunções. Resumidamente este problema possui uma sequência infinita de

autovalores positivos $\lambda_n = n^2$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e as autofunções correspondentes são proporcionais a $\sin(nx)$.

Observação: uma matriz com coeficientes reais pode ter autovalores complexos.

Caso $\boldsymbol{\lambda} < \mathbf{0}$: Temos $\lambda = -\mu^2$ e a equação fica:

$$y'' - \mu^2 y = 0$$

Utilizando uma equação característica encontramos as seguintes raízes

$$r^2 - \mu^2 = 0$$

$$r_1 = \mu \qquad r_2 = -\mu$$

A solução geral é

$$y = c_1 \cosh(\mu\, x) + c_2 \sinh(\mu\, x)$$

As funções hiperbólicas $\cosh(\mu\, x)$ e $\sinh(\mu\, x)$ foram escolhidas em vez da $e^{\mu x}$ e $e^{-\mu x}$ por conveniência no cálculo das condições de contorno. Na primeira condição de contorno $c_1 = 0$ e a segunda, $c_2 \sinh(\mu\, \pi) = 0$ e como $\mu \neq 0$ segue que, $\sinh(\mu\, x) \neq 0$ portanto, $c_2 = 0$. Logo $y = 0$ e não existem soluções não triviais quando $\lambda < 0$, o problema não tem autovalores negativos.

Caso $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$:

$$y'' = 0$$

a solução geral

$$y = c_1 x + c_2$$

As condições de contorno só podem ser satisfeitas se $c_1 = 0$ e $c_2 = 0\$$, neste caso só existe a solução trivial $y = 0$, ou seja, $\lambda = 0$ não é um autovalor.

Séries de Fourier

O foco principal do trabalho do matemático francês Joseph Fourier (1768-1830) era a hipótese fundamental de que uma função pode ser representada por uma série, cuja parcela desta série é uma combinação linear de funções trigonométricas seno e cosseno, nas quais os coeficientes são chamados de coeficientes de Fourier. A partir desta teoria Fourier desenvolveu técnicas de resolução de problemas de contorno na condução de calor.

Os fenômenos estudados na série de Fourier devem ter comportamento ondulatório e sua aplicabilidade compreende um maior número de fenômenos físicos.

A função que representa a série de Fourier pode ter definições distintas em intervalos distintos e a derivada nem mesmo existir para a função original $f(t)$ que representa o fenômeno ondulatório.

As séries de Fourier são análogas às séries de Taylor no quesito de que ambas fornecem uma maneira de expressar funções complexas em termos de certas funções elementares familiares, elas representam funções como séries infinitas de seno e cosseno.

Vejamos a série da forma

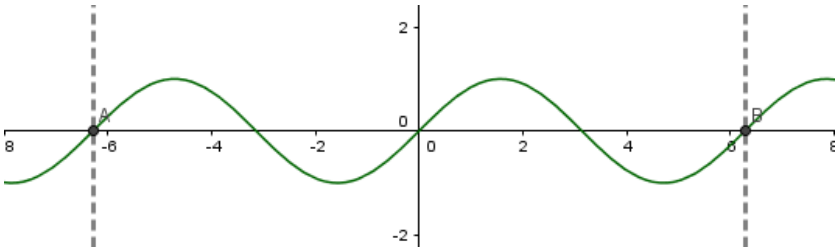
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right)$$

Os termos a_0, a_m e b_m são os coeficientes, números que variam dependendo da função que queremos representar. O m vem do índice da série, presente tanto no seno como no cosseno. Fazendo $m = 1, 2, 3, \ldots$ encontramos os termos do somatório. O primeiro termo da série é representado por $\frac{a_0}{2}$, em vez de a_0. Como nas Séries de Taylor, a variável x está dentro do somatório, pois a $f(x)$ está escrita em forma de série. O elemento L faz parte do período da função que queremos representar, ou seja, a função que se repete a cada período.

Periodicidade das Funções Seno e Cosseno

Nas Séries de Fourier é necessário desenvolver algumas propriedades das funções trigonométricas como $\sin(m\pi x/L)$ e $\cos(m\pi x/L)$, onde m é um número positivo. Uma Função periódica é aquela função que se repete a cada período, onde $T > 0$ se o domínio de f contém $x + T$, que pode ser definida como qualquer função desde que $f(x) = f(x + T)$ para todo x e portanto, $2T$ como qualquer múltiplo de T também é um período de f. Período fundamental da função é o menor valor de T que satisfaz a expressão $f(x) = f(x + T)$. Uma função constante pode ser considerada periódica com qualquer período, mas não tem período fundamental.

Figura 5.1 – Função seno, $\sin x = \sin(x + 2\pi)$, que se repete a cada intervalo 2π de x.



Fonte: Elaborado pela Autora.

Quando f e g são duas funções periódicas com período comum T, seu produto $f \cdot g$ e qualquer combinação linear, $c_1 f + c_2 g$, também são periódicos com período T.

$$F(x+T) = c_1 f(x+T) + c_2 g(x+T) = c_1 f(x) + c_2 g(x) = F(x)$$

Analisando as Séries de Fourier encontramos $\cos\frac{m\pi x}{L}$, substituindo x por $(x + 2L)$ temos

$$\cos\frac{m\pi(x+2L)}{L} = \cos\frac{m\pi x}{L} + 2m\pi = \cos\frac{m\pi x}{L}$$

O mesmo ocorre com o seno:

$$\sin\frac{m\pi(x+2L)}{L} = \sin\frac{m\pi x}{L} + 2m\pi = \sin\frac{m\pi x}{L}$$

Portanto $\cos\frac{m\pi x}{L}$ e $\sin\frac{m\pi x}{L}$, $m = 1,2,3, \ldots$ são funções de período fundamental $T = \frac{2L}{m}$, mas $\sin(x)$ e $\cos(x)$ têm período fundamental 2π e $\sin(\alpha x)$ e $\cos(\alpha x)$ tem período fundamental $2\pi/\alpha$. Definindo $\alpha = \frac{m\pi}{L}$, o período T de $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$

é dado por $T = \frac{2\pi L}{m\pi} = \frac{2L}{m}$, e como todo múltiplo inteiro de um período também é um período, cada uma das funções $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ tem um período comum. Como a série envolve a soma desses termos (combinação linear), a função representada também é $2L$ – periódica.

Ortogonalidade das Funções Seno e Cosseno

Para expor a segunda propriedade das funções de $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ deve-se relembrar o conceito de ortogonalidade de vetores. O produto interno usuais $< u, v >$ de duas funções reais u e v no intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$ é definido por

$$< u, v >= \int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x)dx$$

as funções u e v são ditas ortogonais em $\alpha \leq x \leq \beta$ se seu produto interno for nulo, ou seja, se

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x)dx = 0$$

Um conjunto de funções é um conjunto ortogonal se distintos pares de funções pertencentes ao conjunto são ortogonais. As funções $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, $m = 1, 2, \ldots$, formam um conjunto ortogonal de funções no intervalo $-L \leq x \leq L$ e satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade

$$1)\ \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ L, m = n \end{cases}$$

$$2)\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0, \text{para todo m, n}$$

Se $m = n$, então a integral deve ser calculada da seguinte maneira

$$\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_{-L}^{L}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]^2 dx$$

Seja $u = \frac{n\pi x}{L} \Rightarrow du = \frac{n\pi}{L}dx \Rightarrow dx = \frac{L}{n\pi}du$

$$= \int \cos^2 u \frac{L}{n\pi}du$$

$$= \frac{L}{n\pi}\int \cos^2 u\, du$$

$$= \frac{L}{n\pi}\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin(2u)\right)$$

$$= \frac{L}{n\pi}\left[\frac{1}{2}\frac{n\pi x}{L} + \frac{1}{4}\sin\left(2\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_{-L}^{L}$$

$$= \frac{L}{n\pi}\left[\frac{1}{2}\frac{n\pi L}{L} + \frac{1}{4}\sin\left(2\frac{n\pi L}{L}\right) - \frac{1}{2}\frac{n\pi(-L)}{L} - \frac{1}{4}\sin\left(2\frac{n\pi(-L)}{L}\right)\right]$$

$$= \frac{L}{n\pi}\left[\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin(2n\pi) + \frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{L}{n\pi}(n\pi) = L$$

$$3)\ \int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ L, m = n \end{cases}$$

Por meio da integração direta pode-se também obter os resultados

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \left[\cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right)\right] dx$$

$$= \frac{L}{2\pi}\int_{-L}^{L} \left[\sin\left(\frac{(m-n)\pi x/L}{m-n}\right) - \sin\left(\frac{(m+n)\pi x/L}{m+n}\right)\right]_{-L}^{L} = 0$$

desde que $m+n$ e $m-n$ sejam diferentes de zero (m e n são positivos), $m+n \neq 0$.

As Fórmulas de Euler-Fourier

Supondo que a série seguinte converge, a soma chamar-se-á de $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\frac{m\pi x}{L} + b_m \sin\frac{m\pi x}{L}\ \right)$$

Como consequência das condições de ortogonalidade (1), (2) e (3) podemos encontrar a relação entre os coeficientes a_m, b_m e $f(x)$ multiplicando a equação anterior por $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, onde n é um inteiro positivo fixo ($n > 0$) e integrando em relação a x de $-L$ a L e supondo que a série possa ser integrada termo a termo, temos:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L}\left(\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)dx$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L}\left(\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)dx$$

Tendo em vista que n está fixo e m variando sobre todos os números inteiros positivos e seguindo as relações de ortogonalidade, o único número não nulo, à direita da igualdade na equação, é o termo onde $m = n$ no primeiro somatório. Logo

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = L.a_0\,,\ \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Para determinar a_0 integramos a equação de $-L$ a L obtendo

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx =$$

$$= \frac{a_0}{L}\int_{-L}^{L} dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L}\left(\cos\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L}\left(\sin\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

Como cada integral, relacionada a uma função trigonométrica, é zero, assim

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Multiplicando a equação por $\sin(n\pi x/L)$, integrando termo a termo de $-L$ a L e usando as relações de ortogonalidade, obtemos uma expressão semelhante para b_n

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \;\; n = 1,2,3, \ldots$$

As duas equações são conhecidas como as fórmulas de Euler-Fourier para os coeficientes de uma série de Fourier, desde que a série seja convergente para a $f(x)$ e possa ser integrada termo a termo.

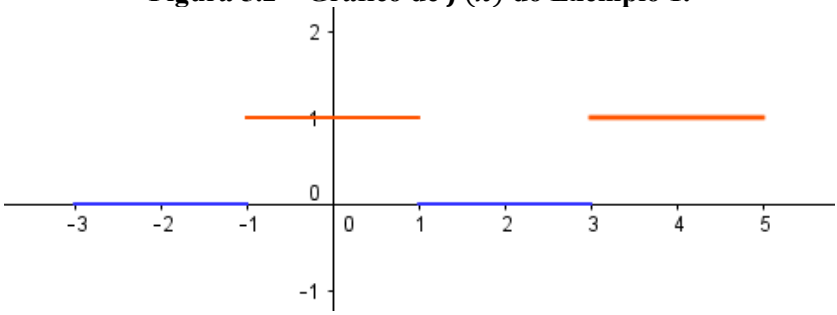
Exemplos:

1) Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 3 \end{cases}$$

e suponha que $f(x+6) = f(x)$

Figura 5.2 – Gráfico de $f(x)$ do Exemplo 1.



Fonte: Elaborado pela Autora.

Observe que nos pontos de descontinuidade não foi atribuído valor para $f(x)$, como em $x = -1$ e $x = 1$, isto se deve pelo fato de que os valores dos coeficientes são calculados por uma integral e os valores dos integrandos em um único ponto ou em um número infinito de pontos não interfere no valor da integral. Nos pontos de descontinuidade os valores dos coeficientes são os mesmos, independentemente dos valores atribuídos a $f(x)$.

A série de Fourier assume a seguinte forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\frac{n\pi x}{3} + b_m \sin\frac{n\pi x}{3} \right)$$

Como o período é 6, $L = 3$ e os coeficientes são dados por

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx = \left[\frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx = \left[\frac{1}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]_{-1}^{1} = 0$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

Assim, a série de Fourier é

$$f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \cos\frac{\frac{2\pi x}{3}}{2} - \cos\frac{\frac{4\pi x}{3}}{4} - \frac{\frac{5\pi x}{3}}{5} + \cdots\right]$$

2) Seja

$$f(x) = \begin{cases} -x, -2 \leq x < 0 \\ x, 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

e, $f(x+4) = f(x)$

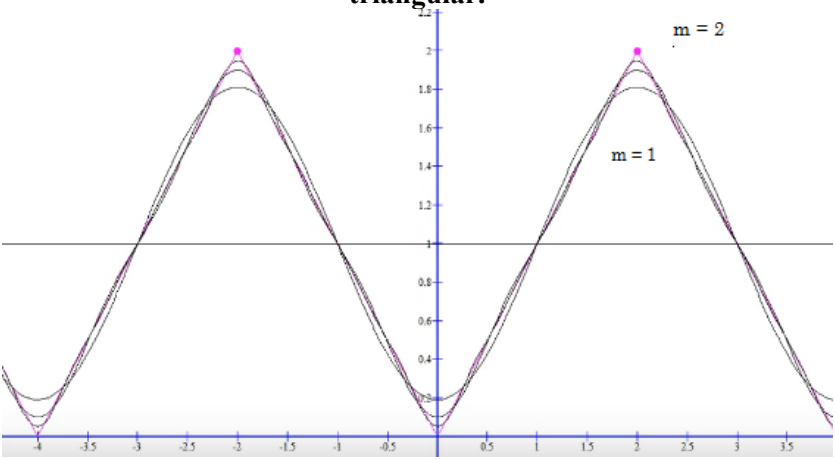
Investigue a velocidade de convergência da série e determine quantos termos são necessários para que o erro não seja maior do que $0{,}01$ para todo x.

A m-ésima soma parcial dessa série pode ser usada para aproximar a função f.

$$S_m(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{m} \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)}{(2n-1)^2}$$

Pela questão dos coeficientes diminuírem como $(2n-1)^2$, a série converge rapidamente como demonstra o gráfico seguinte.

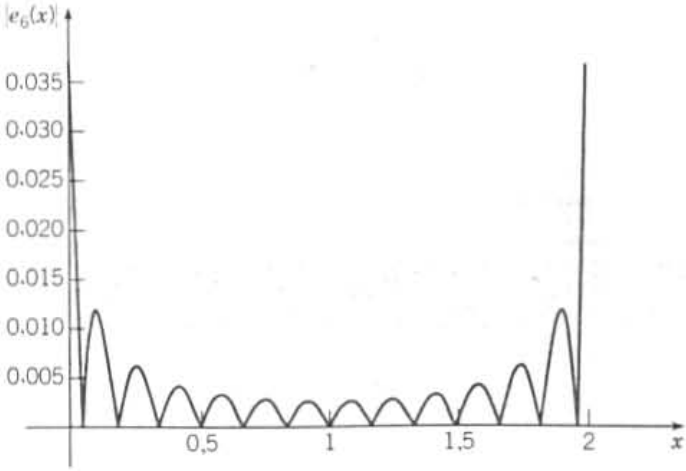
Figura 5.3 – Somas Parciais da série de Fourier para a onda triangular.



Fonte: Elaborado pela Autora.

Considerando o erro $e_m(x) = f(x) - S_m(x)$ em função de x para $0 \leq x \leq 2$, $|e_6(x)|$ é maior nos pontos $x = 0$ e $x = 2$, nos quais o gráfico de $f(x)$ apresenta bicos. Nesta região é mais difícil a aproximação da série da função, o erro é maior para um dado m.

Figura 5.4 – Gráfico de $|e_6(x)|$ em função de x para a onda triangular



Fonte: Boyce e Diprima (2013, p.456).

Tabela 5.1 – Valores do erro e_m para a onda triangular

m	$e_m(2)$
2	0,09937
4	0,05040
6	0,03370
10	0,02025
15	0,01350
20	0,01013
25	0,00810

Fonte: Boyce e Diprima (2013, p.456).

A partir dessas informações pode-se calcular o número de termos da série que são necessários para se obter um nível de maior aproximação em relação à função.

Teorema de Convergência de Fourier

Supostamente dada uma função f, sendo periódica com período $2L$ e integrável no intervalo $[-L, L]$, pode se calcular um conjunto de coeficientes a_m e b_m pelas equações

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

$m = 1,2,3, \ldots$

E construir uma série da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

A questão é saber se a série converge para algum valor x e se sua soma é $f(x)$. Foram descobertas algumas séries de Fourier correspondentes a uma função f que não convergem e que podem divergir de $f(x)$.

Uma função f é dita seccionalmente contínua se em um intervalo $a \leq x \leq b$ se o intervalo pode ser dividido por um número finito de pontos $a = x_0 < x_1 < \cdots\ x_n = b$ sendo que:

1) f é contínua em cada subintervalo aberto $x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}$
2) f tende a um limite finito nas extremidades de cada subintervalo, quando nos aproximamos dos pontos extremos de cada subintervalo do interior do subintervalo.

A notação $f(c+)$ é usada para denotar o limite de $f(x)$ quando $x \to c$ pela direita e analogamente,$f(c-)$ quando $x \to c$ pela esquerda. Não é necessário que a função esteja definida nos pontos de partição x_i e não é essencial que o intervalo seja fechado, podendo ser aberto, ou aberto em uma das extremidades e fechado na outra.

Teorema: Suponha que f e f' são seccionalmente contínuas no intervalo $-L \leq x \leq L$ e que, f está definida fora do intervalo $-L \leq x \leq L$, mas é periódica com período $2L$. A série de Fourier para a f é

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

A série de Fourier converge para $f(x)$ em todos os pontos onde f é contínua e converge para $[f(x+) + f(x-)]/2$ em todos os pontos onde f é descontínua.

Observe que $[f(x+) + f(x-)]/2$ é o ponto médio dos limites à direta e à esquerda, portanto a série de Fourier converge para $[f(x+) + f(x-)]/2$ em todos os pontos e em qualquer ponto onde f é contínua, $f(x+) = f(x-) = f(x)$.

As condições dadas nesse teorema são apenas para a convergência de uma série de Fourier, não são particularmente necessárias. Exemplo de funções excluídas do teorema temos as

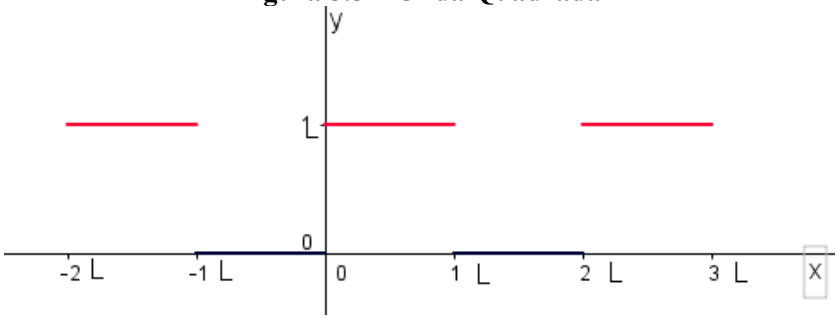
que apresentam descontinuidade infinita no intervalo $[-L, L]$, como $1/x^2$ quando $x \to 0$, ou $\ln|x - L|$ quando $x \to L$.

Exemplo: Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < 0; \\ L, & 0 < x < L \end{cases}$$

e f definida fora desse intervalo de modo que $f(x + 2L) = f(x)$ para todo x.

Figura 5.5 – Onda Quadrada



Fonte: Elaborado pela Autora.

A figura 5.5 representa uma onda quadrada, cujo intervalo $[-L, L]$ pode ser dividido em dois subintervalos abertos $(-L, 0)$ e $(0, L)$. Em $(0, L)$,$f(x) = L$ e $f'(x) = 0$, mas tanto f e f' são contínuas e têm limites quando $x \to 0$ pela direita e $x \to L$ pela esquerda, semelhantemente $(-L, 0)$ e em consequência, f e f' são seccionalmente contínuas em $[-L, L]$ satisfazendo o teorema. Encontrando os valores dos coeficientes a_m e b_m garantem a convergência da série de Fourier em todos os pontos onde f é contínua.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_0^L dx = 0$$

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = 0, m \neq 0$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{m\pi}(1-\cos(m\pi)$$

$$= \begin{cases} 0, & m \text{ par} \\ \dfrac{2L}{m\pi}, & m \text{ ímpar} \end{cases}$$

Portanto

$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) + \cdots\right)$$

$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{m}$$

$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)}{2n-1}$$

Nos pontos $x = 0, \pm nL$, onde a função é descontínua, todos os termos na série após o primeiro desaparecem e a soma é $L/2$, esse é o valor médio dos limites à direita e à esquerda. Definimos f nesses pontos como tendo o valor $L/2$ mesmo que escolhermos outros valores a série permanece com valor de $L/2$. A série não converge para a função nesses pontos a menos que f esteja definida como tendo valor $L/2$.

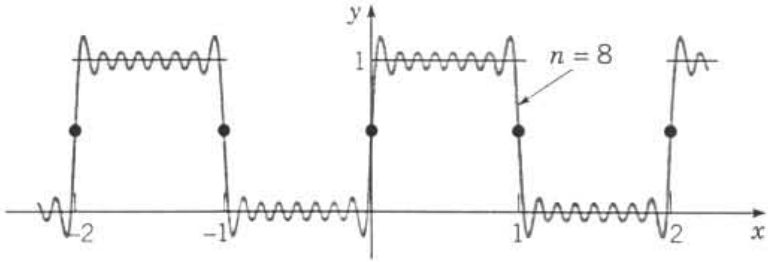
As somas parciais

$$S_n(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \cdots + \frac{1}{2n-1}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)\right)$$

$n = 1, 2, \ldots$

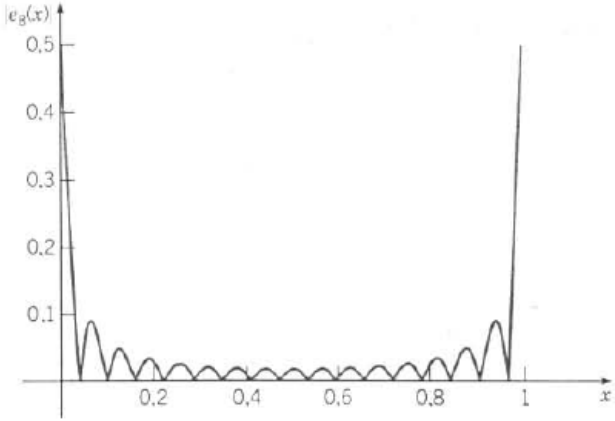
da série de Fourier convergem para f , como mostra a Figura 5.6 abaixo, onde L foi escolhido como 1 e está apresentado no gráfico de $S_8(x)$. Analisando a figura os pontos onde f é contínua as somas parciais tendem a $f(x)$ quando n aumenta. Nas proximidades dos pontos de descontinuidade, como $x = 0$ e $x = L$, as somas parciais não convergem suavemente ao ponto médio, elas passam da marca em cada extremidade do salto. Este fenômeno é típico em séries de Fourier em pontos de descontinuidade e é conhecido como fenômeno de Gibbs.

Figura 5.6 – Soma parcial $S_8(x)$ da série de Fourier, da onda quadrada



Fonte: Boyce e Diprima (2013, p.463)

Figura 5.7 – Gráfico do Erro $|e_8(x)|$ em função de x para onda quadrada



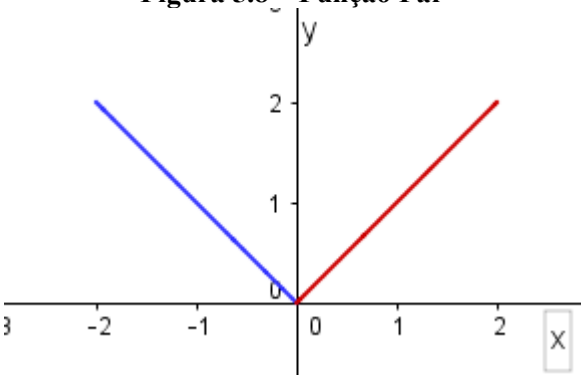
Fonte: Boyce e Diprima (2013, p.463)

Um melhor entendimento se obtém considerando $e_n(x) = f(x) - S_n(x)$. A Figura 5.7 mostra o gráfico de $|e_8(x)|$ em função de x para $n = 8$ e $L = 1$. A menor cota superior de $|e_8(x)|$ é 0,5 e é aproximada quando $x \to 0$ e $x \to 1$. Quando n aumenta, o erro diminui no interior do intervalo onde $f(x)$ é contínua, mas a menor cota inferior não diminui quando n aumenta.

Funções Pares e Ímpares

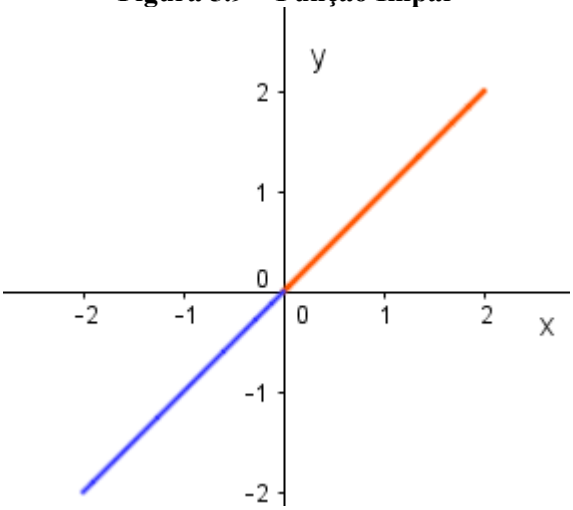
Pela propriedade de simetria em relação ao eixo dos y e à origem podemos distinguir geometricamente as funções da fórmula de Euler-Fourier como funções pares e ímpares.

Figura 5.8 – Função Par



Fonte: Elaborado pela Autora

Figura 5.9 – Função Ímpar



Fonte: Elaborado pela Autora

A função é par quando o seu domínio contém o ponto $-x$ sempre que contiver o ponto x e se $f(-x) = f(x)$ para cada x no domínio de f. A função é ímpar quando em seu domínio contém

$-x$ sempre que contiver x e se $f(-x) = -f(x)$ para cada x no domínio de f e observe que, $f(0)$ tem que ser zero se f for uma função ímpar cujo domínio contém a origem.

Propriedades elementares de funções pares e ímpares:

- A soma (diferença) e o produto (quociente) de duas funções pares são pares;

- A soma (diferença) de duas funções ímpares é ímpar; o produto (quociente) de duas funções ímpares é par;

- A soma (diferença) de uma função par e uma função ímpar não é par e nem ímpar; o produto (quociente) de tais funções é ímpar;

- Se f for uma função par, então

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$$

- Se f for uma função ímpar, então

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$$

Séries em Cossenos

Supondo que f e f' são seccionalmente contínuas em $-L \leq x < L$ e que f é uma função periódica par com período $2L$, seguindo a primeira e terceira propriedade, confirmamos que $f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é par e que $f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é ímpar. Portanto os coeficientes da série de Fourier são dadas por

$$a_n \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\,, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = 0, \;\; n = 0,1,2,\ldots$$

Logo

$$f(x) = \frac{a_2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Considerações Finais

Artigo que proporcionou incentivo à pesquisa e grande conhecimento sobre as Séries de Fourier. Através deste artigo pôde-se perceber a grande importância dos estudos desenvolvidos por Jean Baptiste Joseph Fourier aos problemas relacionados à condução do calor, e às resoluções de problemas práticos relacionados à física e à engenharia. Além disso, mostrou que a matemática possui aplicações em diferentes áreas do conhecimento, inclusive em áreas que muitas vezes não se imagina estar presente, como é o caso da música. Nos estudos vivenciamos a dificuldade de sair da matemática algébrica e ir para a física principalmente sobre as Séries de Fourier, por ser mais complexo ao acadêmico de licenciatura em Matemática.

Referências

BOYCE,W. E; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** Tradução e revisão técnica Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

MAZORCHE, S. **10.2 Séries e Integrais de Fourier.** Disponível em: <androhttp://www.ufjf.br/sandro_mazorche/files/2012 /11/Equa%C3%A7%C3%B5es-Diferenciais-II-Series-de-fourier.pdf>. Acesso em 13 Nov 2016.

UNIVESPTV. **Séries de Fourier**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=JFdBfemyXRU>. Acesso em 13 Nov 2016.