O CÁLCULO E A MATEMÁTICA SUPERIOR: ALGUMAS APLICAÇÕES

Afrânio Austregésilo Thiel
Matheus dos Santos Modesti

O CÁLCULO E A MATEMÁTICA SUPERIOR: ALGUMAS APLICAÇÕES

1ª Edição

Blumenau
Instituto Federal Catarinense
2016

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense

Reitora
Sônia Regina de Souza Fernandes

Pró-Reitor de Administração e Planejamento – PROAD
Delides Lorensetti

Pró-Reitor de Desenvolvimento Institucional – PRODIN
Robert Lenoch

Pró-Reitoria de Ensino - PROEN
Josefa Surek de Souza

Pró-Reitor de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação – PROPI
Cladecir Alberto Schenkel

Pró-Reitor de Extensão – PROEX
Fernando José Garbuio

Título da obra: O Cálculo e a Matemática Superior: algumas aplicações
Coordenação editorial
Fernando José Garbuio
Kátia Linhaus de Oliveira
Capa
Rafael de Camargo Pedroso
Projeto gráfico e diagramação
Sonia Trois

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Thiel, Afrânio Austregésilo
O cálculo e a matemática superior: algumas aplicações / Afrânio Austregésilo Thiel, Matheus dos Santos Modesti. – Blumenau : Instituto Federal Catarinense, 2016.
120 p.

ISBN: 978-85-5644-007-5

1. Matemática. 2. Matemática - História. 3. Funções (Matemática). 4. Álgebra Linear. 5. Cálculo Diferencial. 6. Cálculo Integral. I. Modesti, Matheus dos Santos. II. Título.

CDD- 510.711

Ficha Catalográfica elaborada pela Bibliotecária: Eliane Rodrigues Mota Orelo - CRB 14/1213

Tiragem: 300 exemplares

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense
Rua das Missões, 100 – Ponta Aguda
Blumenau/SC – CEP: 89.051-000
Fone: (47) 3331-7800
Livro publicado com apoio do Edital 111/2016.

Sumário

PREFÁCIO

"Não há ramo da matemática, independentemente do quão abstrato seja, que não poderá ser aplicado em algum momento a algum fenômeno do mundo real."

Nikolai Lobatchevsky (1792-1856)
Matemático russo

Toda vez que alguém se propõe a ler um livro que contém Matemática deve ter em mente que tal manuscrito não pode ser usufruído de maneira completa, da mesma maneira que se usufrui de um texto qualquer, isto é, apenas passando por suas folhas *diagonalmente.* O leitor deve parar, refletir, pensar, fazer anotações, diagramas. Deve brincar com as ideias, explorá-las, estendê-las a outros conjuntos, cientificar-se de que as proposições são verdadeiras. Daí, um texto matemático deve ser escrito com esse intuito em mente. E é exatamente isso que os amigos Afrânio e Matheus fizeram com *Cálculo e a Matemática Superior: algumas aplicações.*

Neste livro, o leitor irá encontrar o cálculo diferencial e integral, a matemática superior trazida por Newton e Leibniz, que transformaram a ciência como um todo e permitiram toda uma nova compreensão dos fenômenos naturais, apresentado de maneira a vislumbrar algumas de suas aplicações em várias áreas.

Seu público alvo é, portanto, o estudante que busca complementar as definições e teoremas mais formais dos livros-texto de Cálculo com exemplos mais singelos e melhor palatáveis, de modo a encontrar uma compreensão mais abrangente deste tão importante conteúdo. Professores de nível superior poderão encontrar aqui ótimas introduções, na forma de aplicações, que poderão ser utilizadas em aulas de Introdução ao Cálculo e Cálculo Diferencial e Integral.

A frase de Lobatchevsky, que inicia este prefácio, tem intuito de sugerir aos leitores que é possível buscar aplicações de todo o tipo de matemática nos fenômenos ao nosso redor. Os autores facilitaram essa busca, ao mostrar como podemos aplicar Cálculo e Análise em vários fenômenos cotidianos. Que nos inspiremos neles para aprender, desenvolver e aplicar Matemática, essa maravilha que a mente humana foi capaz de criar.

Luiz Rafael dos Santos
Doutor em Matemática Aplicada
Professor Adjunto da Universidade Federal de Santa Catarina

APRESENTAÇÃO

A Matemática é o trabalho do espírito humano que está destinado tanto a estudar como a conhecer, tanto a procurar a verdade como a encontrá-la. (Évariste Galois1)

A Matemática surgiu e vem sendo desenvolvida pelo homem em função de necessidades sociais. A massa de conhecimentos se expande, no sentido de um saber prático, constituído de modelos úteis, que permitem funcionar.

A cada século, a sociedade vai ficando mais complexa. A cultura se acumula, mas sempre com um sentido prático, ligada ao dia a dia do ser humano. O comércio se expande, facilitando o intercâmbio cultural, intensificando o transporte terrestre, marítimo e aéreo. As indústrias aplicam cada vez mais conhecimentos e novas tecnologias.

Todas as áreas do conhecimento estão permeadas pela Matemática requerendo que o estudante esteja familiarizado com uma larga variedade de conceitos matemáticos. Observa-se também que os currículos dos cursos relacionados às Ciências Exatas propõem o Cálculo Diferencial e Integral, com o intuito de transformar expressões complexas em uma linguagem inteligível, ou seja, de fácil compreensão.

Chamamos a atenção para a necessidade de saber o momento certo de adequar e conciliar determinado artifício matemático com as áreas de conhecimento a ele relacionadas.

A presente obra descreve os assuntos de forma simples e clara por meio de explicações concisas, fornecendo ao leitor um considerável número de exercícios e aplicações práticas, distribuídos ao longo do texto (capítulos). Os problemas[2] abordados e resolvidos variam em grau de dificuldade, envolvendo desde a simples operação matemática, até sua aplicação mais sofisticada.

O objetivo do texto não é estar apresentando definições e teorias, mas, diante de conhecimentos prévios já adquiridos, que o leitor supostamente tenha, explorar as aplicações.

1. Évariste Galois (25/10/1811 – 31/05/1832) provocou uma verdadeira revolução conceitual: para estudar uma equação, criou uma classe de objetos matemáticos de natureza completamente diferentes associados a essa equação, e obteve dessa classe, a qual chamou de GRUPO, informações qualitativas sobre a equação, tais como solvabilidade e solvabilidade por radicais. Uma das importantes vertentes do desenvolvimento posterior da teoria de grupos foi o conceito de grupos contínuos, desenvolvido pelo norueguês Marius Sophus Lie (1842-1899), em colaboração com o alemão Felix Christian Klein (1849-1925).

2. A elaboração dos gráficos foi realizada com os aplicativos 'Geogebra' e Wolfram Mathematica. Algumas equações, por motivos estéticos, foram escrita em linguagem 'tex' estando inseridas no corpo do texto.

Esta obra é uma tentativa de buscar melhor aproveitamento e desempenho por parte dos estudantes e culminar no uso adequado em situações reais no exercício de sua prática profissional, assim como em atividades de pesquisa. Consiste, também, em uma compilação de aplicações, cuja disponibilidade, em suas fontes primárias, está fora do alcance da maioria dos discentes, pelos mais diversos motivos.

O livro está organizado da seguinte forma:

- Histórico;
- Funções;
- Cálculo Diferencial;
- Cálculo Integral;
- Equações Diferenciais Ordinárias;
- Álgebra Linear;
- Outras Aplicações.

A escolha de tais conteúdos, e respectivos exemplos, é o resultado de ampla pesquisa em livros e artigos pertinentes à área, como também de discussões com professores que trabalham na Graduação e Pós-Graduação.

CAPÍTULO 1 – HISTÓRICO

Neste capítulo, apresentaremos um breve histórico do conceito de função, e algumas aplicações históricas interessantes da Álgebra Linear.

1.1 A Gênese do conceito de função: evolução histórica

O conceito de função, assim como todos da matemática, não apareceu de uma hora para outra. Foram necessários vários anos para se formular um conceito, bem como formular representações e aplicações. Este desenvolvimento sofreu vez ou outra uma ruptura, períodos de estagnação e retornos ao longo do processo.

Para Thiel (2013, p.123) fica evidente que “a concepção do ser humano esta firmada no ato de conceber ou criar mentalmente, de compreender, de formar ideias, especialmente abstrações, chegando a uma noção, ou até um conceito”. Pode-se afirmar que a formação do conceito de um elemento matemático, ou seja, da representação de um objeto pelo pensamento, por meio de suas características gerais ou pela ação de formular uma ideia por meio de palavras historicamente vai criando forma, quase sempre passando de mãos em mãos, diante de uma necessidade prática do ser humano para encontrar resposta a algo que o incomoda, seja ele real ou fictício, produzindo sentido ao saber.

Youschkevich (1976, p. 9) destaca que o desenvolvimento da noção de função pode ser dividido em três fases:

1ª.) **A Antiguidade**: Nesta fase verifica-se o estudo de alguns casos de dependência entre duas quantidades, sem ainda destacar a noção de variáveis e de funções. Trabalhavam de forma intuitiva com conceitos de área e limite.

2ª.) **A Idade Média**: Etapa em que se expressavam as noções de funções sob forma geométrica e mecânica, prevalecendo para cada caso concreto de dependência entre duas quantidades, uma definição descrita por meio gráfico ou verbal, preferencialmente por uma fórmula.

3ª.) **O Período Moderno**: No fim do século XVI e notadamente durante o século XVII, começam a ter destaque as expressões analíticas de função, sendo que o método analítico para representar as relações entre variáveis, geralmente expressas por meio da soma de séries infinitas, revoluciona a Matemática devido sua extraordinária eficácia e assegura a esta noção um lugar de destaque em todas as ciências exatas.

A seguir, sintetizamos cada uma das fases, seus matemáticos e evoluções mais importantes.

1.1.1 A Antiguidade

A matemática primitiva surge como ciência prática, em algumas áreas do Oriente, com a premissa básica de dar suporte às atividades relacionadas à agricultura e a engenharia.

Essas atividades requeriam o cálculo e uso de um calendário, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para uso na colheita, no armazenamento e distribuição dos alimentos, a elaboração de métodos para a construção de canais e reservatórios, também para dividir a terra instituindo práticas comerciais e financeiras com vistas ao registro e arrecadação de taxas e propósitos mercantis.

As primeiras noções de função deram-se via observação na relação de dependência entre duas quantidades, em geral, pesos ou medidas.

Na Grécia, a partir do século VI e V a.C. os pitagóricos começam a cientifizar a matemática, diminuindo um pouco seu interesse pelas aplicações práticas.

No século I, com seu avanço e a conquista da Índia, os árabes se depararam com outra cultura matemática: "a álgebra e a aritmética". Um novo sistema de numeração "o sistema decimal", introduzindo o zero, aparece com os hindus.

1.1.2 Idade Média

No século XII nas escolas de filosofia natural de Oxford e Paris ocorreram alguns avanços da Matemática. Nesta fase predominavam as descrições verbais ou gráficas para representar problemas, e a forma geométrica ou mecânica era expressa para dar a noção de função.

Dentre os matemáticos mais importantes e invenções mais importantes, podemos destacar **Leonardo Fibonacci** (Itália, 1170 – 1250), creditado com algumas soluções de equações de 1º, 2º e 3º graus, **Jordannus Nemorarius** (Alemanha, 1225 – 1260) que introduziu os sinais de + e – na forma de p (plus = mais) e m (minus = menos), **Nicole d'Oresme** (França, 1323 – 1382) que descreveu graficamente a relação e dependência entre velocidade e tempo, além de **Nicolas Chuquet** (França, 1445 – 1488) que também trabalhou com resoluções de equações.

1.1.3 Período Moderno

Em fins do século XVI e a partir do século XVII deu-se início de forma mais intensa os estudos e pensamentos contribuindo para a evolução da noção de função.

Neste período podemos destacar **François Viète** (França, 1540 – 1603), que começou a usar letras para representar quantidades desconhecidas (incógnitas), **Galileu Galilei** (Itália, 1564 – 1642), por meio de instrumentos de medidas aprimorados em suas experiências propôs os métodos de representação em curvas, expressando relações funcionais em palavras e em linguagem de proporção. **René Descartes** (França, 1596 – 1650) introduz o conceito de função em sua obra "*Lá Geométrie*". **Pierre de Fermat** (França, 1601 – 1665) apresentou o conceito de função relacionando álgebra e geometria, além de trabalhar com curvas de segundo grau. Praticamente simultaneamente, **Isaac Newton** (Inglaterra, 1643 – 1727) e **Gottfried Leibniz** (Alemanha, 1646 – 1716) conceberam o Cálculo Diferencial e Integral, que contou com contribuições posteriores de **Joseph Louis Lagrange** (Itália, 1736 – 1813).

No Apêndice B, detalhamos cada uma das fases e seus matemáticos.

1.2 As primeiras aplicações da Álgebra Linear[3]

Sistemas Lineares fizeram parte da história de várias civilizações. A seguir, apresentaremos alguns exemplos dos tipos de problemas que eram resolvidos pelos antigos povos.

1.2.1 Dos Egípcios (3100 – 30 a.C.)

Existe um papiro, chamado pelos cientistas de Ahmes, que é a maior fonte de informação que temos sobre a matemática egípcia. Com cerca de 5 metros de comprimento, ele contém 84 pequenos problemas de matemática, com suas soluções, e é datado de cerca de 1650 a.C. O problema 40 desse papiro é o seguinte:

Divida 100 fardos de cevada entre cinco homens em progressão aritmética, de modo que a soma dos dois menores é um sétimo da soma dos três maiores.

Chamaremos de a a quantidade que algum homem receberá, e d a razão da progressão aritmética. Assim os homens receberão:

$$(a, \qquad a+d, \qquad a+2d, \qquad a+3d, \qquad a+4d)$$

Das condições do problema:

$$a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + (a+4d) = 100$$

$$\frac{1}{7}[(a+2d) + (a+3d) + (a+4d)] = a + (a+d)$$

Essas equações podem ser reduzidas a fim de formar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} 5a + 10d &= 100 \\ 11a - 2d &= 0 \end{aligned}$$

A solução apresentada no papiro usa a técnica conhecida como método da falsa posição. Ele começa assumindo o valor de $a = 1$, e substituindo na segunda equação,

3. Traduzido e adaptado de Anton e Rorres (2010).

obtém-se $d = 11/2$, porém, ao substituir na primeira equação, a resposta é 60, e não 100. Então, o valor de a é ajustado, multiplicando por $100/60$, e obtendo o correto valor de $a = 5/3$.

Substituindo na segunda equação, temos $d = 55/6$. E na primeira equação, temos $100 = 100$, ou seja, obtivemos a resposta correta. Assim, a quantidade que cada homem levará será:

$$\frac{10}{6}, \frac{65}{6}, \frac{120}{6}, \frac{175}{6}, \frac{230}{6}$$

O método da falsa posição foi usado por muitas culturas, por vários séculos.

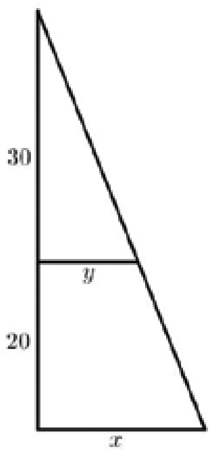
1.2.2 Dos Babilônios (1728-1513 a.C.)

O Velho Império Babilônio nasceu na Mesopotâmia, entre 1728 e 1513 a.C. Algumas tábuas de argila forma achadas, as quais continham problemas de matemática. Uma delas, chamada de Ca MLA 1950, continha o seguinte problema:

Um trapézio, com área de 320 unidades quadradas é cortado de um triângulo retângulo, por uma linha paralela a um de seus lados. O outro lado tem 50 unidades de comprimento e a altura do trapézio é de 20 unidades. Quanto medem as bases maior e menor do trapézio?

Do problema, podemos tirar a Figura 1.1, para facilitar a interpretação:

Figura 1.1 – Ilustração do problema dos Babilônios



Fonte: Adaptado de Anton e Rorres (2010).

Chamamos de x a base maior, e y a base menor do trapézio. A área desse trapézio será dada por

$$\frac{20(x+y)}{2} = 320$$

Pela semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{x}{50} = \frac{y}{30}$$

A solução apresentada na taboa relaciona essas duas equações e monta o sistema linear

$$\frac{1}{2}(x+y) = 16$$
$$\frac{1}{2}(x-y) = 4$$

Resolvendo o sistema, temos $x = 20$ e $y = 12$.

1.2.3 Dos Chineses

O achado mais importante sobre a matemática chinesa é o "Chiu Chang Suan Shu" (263 d.C.), ou, "Os Nove Capítulos da Arte Matemática", que é uma coleção de 246 problemas, com suas soluções.

O oitavo capítulo, "A forma de calcular com matrizes" contém 18 problemas escritos, que levam a sistemas lineares de três a seis incógnitas.

O processo de solução é muito parecido com a Eliminação de Gauss, que só foi desenvolvida no século XIX por Carl Friedrich Gauss. O primeiro problema deste capítulo é:

Existem três variedades de milho. Sabe-se que três montes do primeiro, dois do segundo e um do terceiro resultam em 39 medidas. Dois montes do primeiro, três montes do segundo e um do terceiro somam 34 medidas. E, um monte do primeiro, mais dois do segundo e três do terceiro formam 26 medidas. Quantas medidas de milho estão contidas em cada tipo?

Chamaremos de x, y e z as medidas da primeira, segunda e terceira variedades de milho, respectivamente. Das condições do problema, podemos tirar três equações com três incógnitas:

$$3x + 2y + z = 39$$
$$2x + 3y + z = 34$$
$$x + 2y + 3z = 26$$

A solução apresentada representa os coeficientes pelo número apropriado de varetas dentro dos quadrados, sobre uma tabela de contagem. Coeficientes positivos são representados por varetas pretas, negativos por varetas vermelhas, e quando há o número zero, este quadrado é deixado vazio. As equações são organizadas nas colunas, sendo a primeira equação a mais à direita:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Na sequência, foram ajustados os números de varetas dentro dos quadrados obedecendo a duas etapas:

(1) Duas vezes a coluna três é subtraída de três vezes a coluna dois

(2) Os números da terceira coluna foram subtraídos de três vezes a coluna um.

Essa é a tabela resultante:

		3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

Agora, é feito quatro vezes a segunda coluna menos cinco vezes a primeira coluna, resultando em:

		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

E essa última tabela é equivalente ao seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 5y + z &= 24 \\ 36z &= 99 \end{aligned}$$

Esse sistema é triangular, e pode ser resolvido por substituição, obtendo:

$$x = \frac{37}{4}, \qquad y = \frac{17}{4}, \qquad z = \frac{11}{4}$$

1.2.4 Dos Gregos (Séc. III d.C.)

O sistema linear mais famoso da antiguidade é atribuído a Arquimedes (287 – 212 a.C.), e ficou conhecido como o Problema do Gado.

Conta a história que Arquimedes usou esse problema para desfiar seu colega Erastóstenes (276 – 194 a.C.).

Nenhuma solução foi encontrada, de modo que não sabemos como, ou mesmo se, qualquer um dos dois resolveu esse problema.

Se tu és diligente e sábio, ó estranho, calcule o número de bovinos no rebanho do Deus do sol, que há um tempo pastavam nos campos da ilha de Thracian da Sicília, divididos em quatro rebanhos, de cores diferentes: um branco como o leite, outros pretos brilhantes, um terceiro amarelo e o último malhado. Em cada rebanho, existiam touros, de acordo com essas proporções:

Compreenda, ó estranho, que os touros brancos foram iguais à metade mais um terço dos pretos em conjunto com a totalidade do amarelo; enquanto os pretos eram iguais à quinta parte mais a quarta parte dos malhados somados com a totalidade dos amarelos.

Observe que ainda dos touros restantes, os malhados são a sexta parte dos brancos, mais um sétimo dos amarelos.

Para as vacas, as proporções são:

As brancas são precisamente iguais à terceira parte e um quarto de todo o rebanho preto; o preto é igual à quarta parte do malhado, e com ela uma quinta parte, quando todos, incluindo os touros foram pastar juntos.

Agora, o malhado, era em número igual à quinta parte e um sexto do rebanho amarelo.

Por fim, o amarelo era em número igual a um sexto e um sétimo do rebanho branco.

Se tu podes dizer com precisão, ó estranho, o número de bovinos do Deus do Sol, dando separadamente o número de touros bem alimentados e, novamente, o número de fêmeas de acordo com cada cor, tu irias não ser chamado de não qualificado ou ignorante dos números, mas tu ainda não poderás ser chamado de sábio dos números.

Podemos designar deste problema, oito variáveis:

$B =$ *número de touros brancos*

$A =$ *número de touros amarelos*

$M =$ *número de touros malhados*

$P =$ *número de touros pretos*

$b =$ *número de vacas brancas*

$a =$ *número de vacas amarelas*

$m =$ *número de vacas malhadas*

$p =$ *número de vacas pretas*

Dessa forma, obtemos sete equações homogêneas, com oito incógnitas:

1. $$B = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)P + A$$ *(Os touros brancos são iguais a metade mais um terço dos touros pretos com o inteiro dos touros amarelos)*

2. $$P = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)M + A$$ *(Os touros pretos são iguais à quarta parte dos touros malhados, somadas à quinta parte, mas a totalidade dos touros amarelos).*

3. $$M = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)B + A$$ *(Os touros malhados são iguais à sexta parte dos touros brancos, acrescida da sétima parte, mais a totalidade dos touros amarelos).*

4. $$b = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(P + p)$$ *(As vacas brancas são precisamente iguais a terceira mais a quarta parte de todo o rebanho preto)*

5. $$p = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(M + m)$$ *(As vacas pretas são iguais a quarta parte de todo o rebanho malhado, acrescidas da quinta parte).*

6. $$m = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(A + a)$$ *(As vacas malhadas são iguais a quinta parte e a sexta parte de todo o rebanho amarelo)*

7. $$a = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(B + b)$$ *(As vacas amarelas são em número igual à sexta e a sétima parte das vacas brancas)*

Como são apenas sete equações para oito incógnitas, esse sistema linear admite infinitas soluções da forma:

$$
\begin{aligned}
B &= 10.366.482\,k\\
P &= 7.460.514\,k\\
A &= 4.149.387\,k\\
M &= 7.358.060\,k\\
a &= 7.206.360\,k\\
p &= 4.893.246\,k\\
a &= 5.439.213\,k\\
m &= 3.515.820\,k
\end{aligned}
$$

onde k é qualquer número real. Os valores $k = 1, 2, \ldots$ dão infinitas soluções positivas inteiras para o problema, com sendo a menor delas.

1.2.5 Dos Indianos (Séc. IV d.C.)

O Manuscrito Bakhshali é um trabalho antigo de matemáticos indianos/hindus, datado do século IV d.C., apesar de terem materiais datados de séculos anteriores. É constituído de cerca de 70 folhas, e contém problemas matemáticos e suas soluções.

Muitos dos problemas são chamados "problemas de equalização" e levam a sistemas lineares. Um problema do manuscrito é:

Um comerciante tem sete cavalos da raça asava, um segundo tem nove cavalos da raça haya, e um terceiro tem 10 camelos. Eles são igualmente afortunados no valor dos animais se cada um dá dois animais, um para cada um dos outros. Encontre o preço de cada animal e o valor total para os animais possuídos por cada comerciante.

Para resolver, chamamos de x o número de cavalos da raça asava, y o número de cavalos da raça haya e z o número de camelos. K é o valor total dos animais para cada comerciante. Então, pelas condições do problema, chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$
\begin{aligned}
5x + y + z &= K\\
x + 7y + z &= K\\
x + y + 8z &= K
\end{aligned}
$$

O método descrito no manuscrito começa subtraindo a quantidade $(x + y + z)$ em ambos os lados das três equações, obtendo:

$$4x = 7y = 8z = K - (x + y + z)$$

Podemos deduzir que x, y e z devem ser números inteiros, já que $K - (x + y + z)$ deve ser divisível por 4, 6 e 7.

O manuscrito multiplica os três coeficientes, o que dá 168, e iguala ao valor de $K - (x + y + z)$, o que nos fornece $x = 42$, $y = 28$ e $z = 24$, ao preço $K = 262$. Várias outras soluções são possíveis.

CAPÍTULO 2 - FUNÇÕES

As funções ditam a vida terrestre, sendo que as mais variadas situações podem ser modeladas e adaptadas em linguagem funcional.

Tais aplicações podem variar, desde o crescimento e desenvolvimento de uma planta, uma ida ao posto de gasolina, corridas de táxi, ou até uma simples compra na padaria. De forma mais complexa, vemos as funções como possibilidades de modelagem do mundo concreto, e as operações podem auxiliar na otimização dessas modelagens.

Neste capítulo, apresentaremos algumas aplicações de funções, na sua forma mais simples, sem envolver conceitos de cálculo, que serão abordados posteriormente.

2.1 Funções Polinomiais de Primeiro Grau

Uma função de primeiro grau será qualquer função f na forma:

$$f(x) = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}$$

com $a \neq 0$, onde $\boldsymbol{a}$ representa o coeficiente angular e $\boldsymbol{b}$ o coeficiente linear. Se $a > 0$, a função será crescente, e se $a < 0$ a função será decrescente.

Nosso maior interesse nessas funções é a sua raiz, ou seja, o ponto do domínio que o valor funcional é zero $(f(x) = 0)$.

2.1.1 Lucro, Receita, Custo, Marginais e Ponto de Equilíbrio[4]

O **lucro** que uma empresa obtém em cima de seu produto é a diferença entre o valor que ela recebe de suas vendas (receita) e seu custo de produção. Se $\boldsymbol{x}$ unidades são vendidas, podemos escrever:

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

onde

$$L(x) = \textit{Lucro da venda de unidades;}$$
$$R(x) = \textit{Receita da venda de unidades;}$$
$$C(x) = \textit{Custo da produção de unidades.}$$

4. Traduzido e adaptado de Harshbarger e Reynolds (2013)

Em geral, a **receita** é obtida usando a seguinte equação:

$$R(x) = ax$$

onde

a é o preço por unidade;
x é o número de unidades vendidas.

O **Custo** é composto de duas partes: custos fixos e variáveis. **Custos Fixos** (CF), tais como depreciação, aluguel, e outros, permanecem fixos, independente do total de vendas. Já os **Custos Variáveis** (CV) estão diretamente ligados ao número de unidades produzidas. O custo total é dado pela soma dos custos fixos e variáveis.

Exemplo 2.1 - Custo, Receita e Lucro

Suponha uma fábrica de MP3 Players, que venda cada um deles a $R\$\ 60{,}00$ cada. O custo da produção é de $R\$\ 150.000{,}00$ mais $R\$15{,}00$ para cada unidade produzida e vendida. Escreva a função lucro para produção e venda de unidades.

Solução

A receita total da venda de x MP3 *Players* é $60x$, então, a função receita é:

$$R(x) = 60x$$

Os custos fixos são de $R\$\ 150.000{,}00$, então o custo para x unidades é de $R\$15{,}00$ por unidade. Assim, o custo total é dado por:

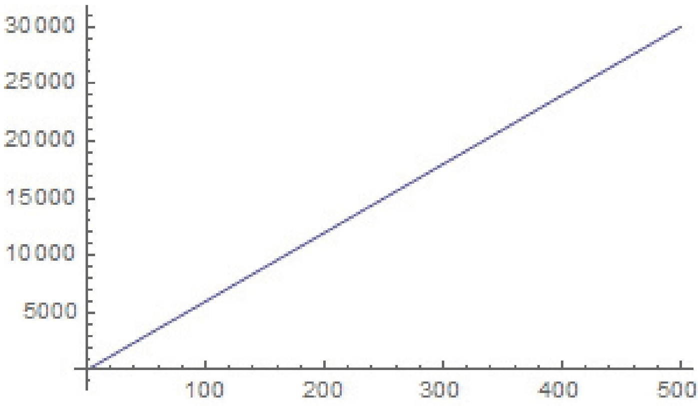
$$C(x) = 15x + 150.000$$

A função Lucro é dada por . Então:

$$P(x) = 60x - (15x + 150.00)$$

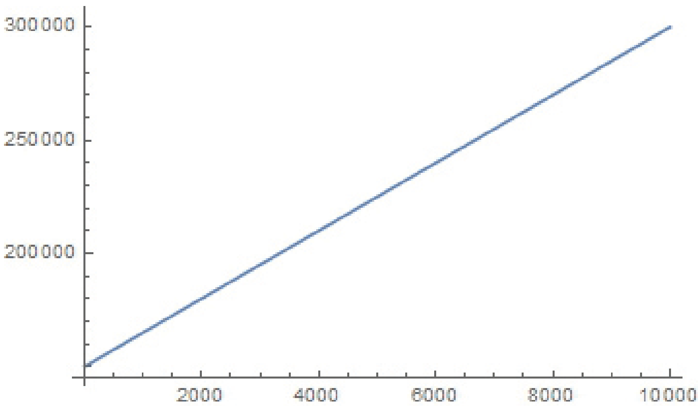
$$P(x) = 45x - 150.000$$

Gráfico 2.1 – Função Receita - $R(x) = 60x$



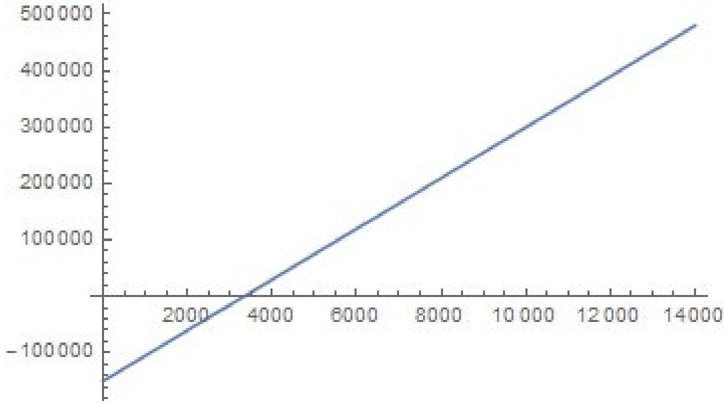
Fonte: Elaborado pelos autores – desenvolvido no Wolfram Mathematica.

Gráfico 2.2 – Função Custo – $C(x) = 15x + 150000$



Fonte: Elaborado pelos autores – Desenvolvido no Wolfram Mathematica.

Gráfico 2.3 – Função Lucro - $\boldsymbol{L(x) = 45x - 150.000}$



Fonte: Elaborado pelos autores – Desenvolvido no Wolfram Mathematica.

No Exemplo 2.1, tanto a função receita como a custo são lineares, assim, a função lucro também será linear. O **coeficiente linear** da função lucro representa a taxa de variação do lucro com respeito ao número de unidades produzidas e vendidas. Isso é chamado de **Lucro Marginal (LC)** para o produto. Assim, o Lucro Marginal do Exemplo 2.1 é de $R\$\ 45\ 00$. De forma similar, o **Custo Marginal (CM)** para o produto é $R\$\ 15{,}00$ (coeficiente angular da função custo), e a **Receita Marginal (RM)** é de $R\$\ 60{,}00$ (coeficiente angular da função receita).

Exemplo 2.2 - Custo Marginal

Suponha que o custo de um produto é, em reais, dado pela função $C(x) = 21{,}75x + 4890$. Qual é o Custo Marginal para este produto?

Solução

Sendo $C(x)$ dada por uma equação da forma $ax + b$, o coeficiente angular da função é o a, que é $21{,}75$ reais, por unidade.

Podemos resolver equações para receita e custo totais simultaneamente, achando o ponto onde o custo e a receita são iguais. Esse ponto é chamado **ponto de equilíbrio**. No gráfico dessas funções, usamos x para representar a quantidade produzida, e y representa os valores de receita e custo, em reais. O ponto onde os gráficos se interceptam é o **ponto de equilíbrio.**

Exemplo 2.3 - Ponto de Equilíbrio

Um comerciante vende seus produtos por R$ 10,00 cada. Seus custos variáveis são de R$ 4,00 por unidade, e o custo de 105 unidades é R$ 1.500,00. Quantas unidades precisam ser vendidas todo mês para o comerciante obter o ponto de equilíbrio?

Solução

A receita total de x unidades do produto é $10x$, então a função da receita é $R = R(x) = 10x$. A equação do custo é

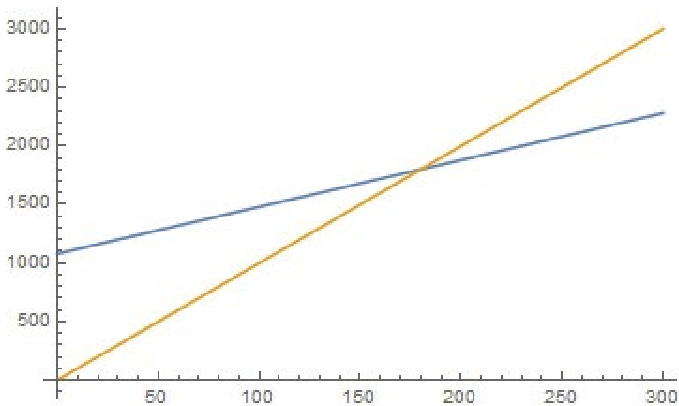
$$C(x) - 1500 = 4(x - 105)$$
$$C(x) = 4x + 1080$$

Obtemos o ponto de equilíbrio resolvendo as duas equações simultaneamente $(R(x) = C(x))$. Assim:

$$10x = 4x + 1080$$
$$6x = 1080$$
$$x = 180$$

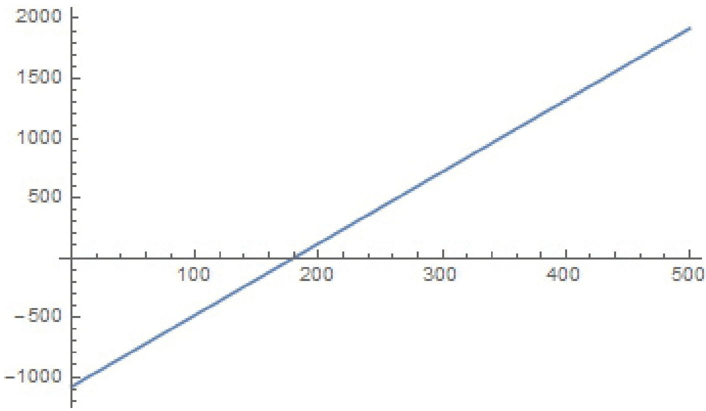
Isso indica que com 180 unidades vendidas, a receita será igual ao custo de produção, ou seja, o lucro será zero. Isso pode ser confirmado pelo leitor ao calcular a função lucro e achar seu valor funcional para $x = 180$.

Gráfico 2.4 – Ponto de Equilíbrio $\boldsymbol{R(x) = 10x}$ - e $\boldsymbol{C(x) = 4x + 1080}$



Fonte: Elaborado pelos autores – Desenvolvido no Wolfram Mathematica.

Gráfico 2.5 – Ponto de Equilíbrio da Função Lucro - $\boldsymbol{L(x) = 6x - 1080}$



Fonte: Elaborado pelos autores – Desenvolvido no Wolfram Mathematica.

No Gráfico 2.4, o intervalo $0 < x < 180$ é onde o custo é maior que a receita, ou seja, onde a função azul está acima da função laranja, e representa uma perda. Essa região também está no Gráfico 2.5, abaixo do eixo , o que mostra um lucro negativo, no mesmo intervalo. Em $x > 180$, a função receita terá valores maiores que a função custo, representando ganhos, e lucro positivo. Essa região está presente nos dois gráficos, no 2.4, com a função laranja acima da função azul, e no Gráfico 2.5, com a função Lucro acima do eixo x.

2.1.2 Oferta, demanda e equilíbrio de mercado

Economistas e comerciantes também utilizam pontos de intersecção para determinar o equilíbrio do mercado. O **Equilíbrio do Mercado** ocorre quando a demanda é igual à oferta de certo produto.

A demanda de certo produto está diretamente relacionada com seu preço. A **Lei da Demanda** diz que a demanda aumentará à medida que o preço diminui, e que ela diminuirá à medida que o preço aumentar. Já a **Lei da Oferta** determina que a quantidade ofertada de determinado produto aumentará à medida que o preço crescer, e vice-versa.

Se representarmos os gráficos da oferta e demanda de certa mercadoria, o equilíbrio de mercado será o ponto de intersecção dos dois gráficos. Neste gráfico, o eixo x deve representar a quantidade vendida, e o eixo y, o preço do produto. O preço neste ponto é o **preço de equilíbrio**, e a quantidade é a **quantidade de equilíbrio**.

Exemplo 2.4 - Equilíbrio de Mercado

Encontre o ponto de equilíbrio de mercado das seguintes funções de oferta e demanda:

$$\textit{Oferta: } p = -3q + 29$$
$$\textit{Demanda: } p = 3q - 1$$

Solução

No equilíbrio de mercado, a oferta é igual à demanda, então:

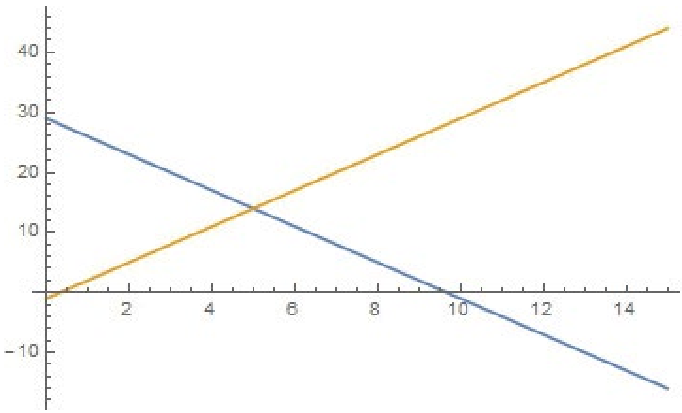
$$-3q + 29 = 3q - 1$$
$$30 = 6q$$
$$q = 5$$

Substituindo q em uma das equações, achamos p:

$$p = 3 \cdot 5 - 1 = 14$$

Assim, o ponto de equilíbrio é $(5{,}14)$, e pode ser conferido no Gráfico 2.6.

Gráfico 2.6 – Equilíbrio de Mercado - $\boldsymbol{p = -3q + 29}$ e $\boldsymbol{p = 3q - 1}$



Fonte: Elaborado pelos autores – Desenvolvido no Wolfram Mathematica.

2.2 Funções Polinomiais de segundo grau

Uma função de segundo grau é qualquer função f tal que

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

com $a \neq 0$.

Suas raízes podem ser determinadas a partir da seguinte fórmula, que pode ser deduzida a partir do método de completamento de quadrados :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para algumas situações, convém usar o método da soma e produto, que é dado por:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

onde x_1 e x_2 são as raízes da equação.

2.2.1 Pontos de Equilíbrio, Maximização e Equilíbrio de Mercado[5]

A grande maioria dos pontos abordados para funções de primeiro grau satisfazem também funções de segundo grau. Vejamos a seguir:

Em um ***mercado monopolizado****, a receita de uma empresa é restringida pela procura do produto. Neste caso, a relação entre o preço p e o número de unidades vendidas x é descrito pela função $p = f(x)$, e o total de receita obtida pelos produtos é dada por:*

$$R = px = [f(x)]x$$

Exemplo 2.5 - Ponto de Equilíbrio

Suponha que em um monopólio de mercado, o total de custos por semana de produção de produtos de alta tecnologia é dado por $C = 2800 + 100x + 2x^2$. Suponha também que a função da demanda semanal é dada por $p = 420 - 2x$. Encontre o número de unidades que devem ser vendidas para alcançar o ponto de equilíbrio para este produto.

5. Traduzido e adaptado de Harshbarger e Reynolds (2013)

Solução

A função custo é $C(x) = 2800 + 100x + 2x^2$, e a receita total é $R(x) = p \cdot x = (420 - 2x)x = 420x - 2x^2$.

Fazendo $C(x) = R(x)$, temos:

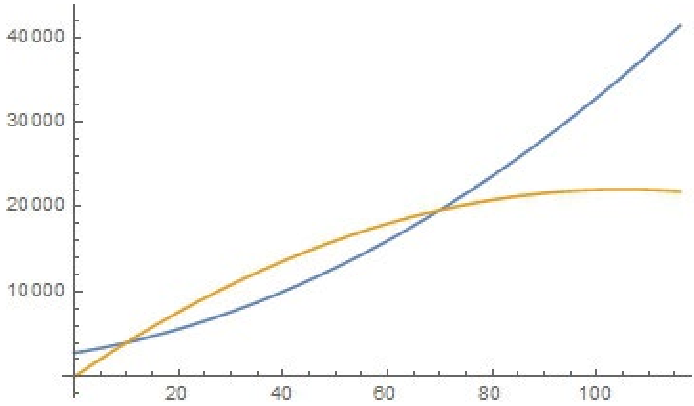
$$2800 + 100x + 2x^2 = 420x - 2x^2$$

$$4x^2 - 320x + 2800 = 0 \Rightarrow x^2 - 80x + 700 = 0$$

$$x_1 = 70, x_2 = 10$$

Como essa função é quadrática, ela admite duas soluções. Isso significa que temos dois pontos de equilíbrio, em $x = 10$ e em $x = 70$. Podemos observar, no Gráfico 2.7 que $R(x) > C(x)$ em $]10, 70[$, e com exceção desse intervalo e dos pontos de equilíbrio, $C(x) > R(x)$ em todo o domínio.

Gráfico 2.7 – Exemplo 2.5 - $\boldsymbol{C(x) = 2800 + 100x + 2x^2}$ e $\boldsymbol{R(x) = 420x - 2x^2}$



Fonte: Elaborado pelos autores – Desenvolvido no Wolfram Mathematica.

Exemplo 2.6 - Maximização de Lucros

Para a função de custo $C(x) = 2800 + 100 + 2x^2$ e a função total de receita $R(x) = 420x - 2x^2$ (funções do exemplo 2.5), encontre o número de unidades para maximizar o lucro, e calcule o lucro máximo.

Solução

Usando $L(x) = R(x) - C(x)$, podemos determinar a função lucro como:

$$\mathrm{L(x)} = (420x - 2x^2) - (2800 + 100x + 2x^2)$$
$$L(x) = -4x^2 + 320x - 2800$$

Como o coeficiente angular da função é negativo, sabemos que sua concavidade é voltada para baixo, assim, calculando o vértice do gráfico, obtemos o ponto que maximiza a função.

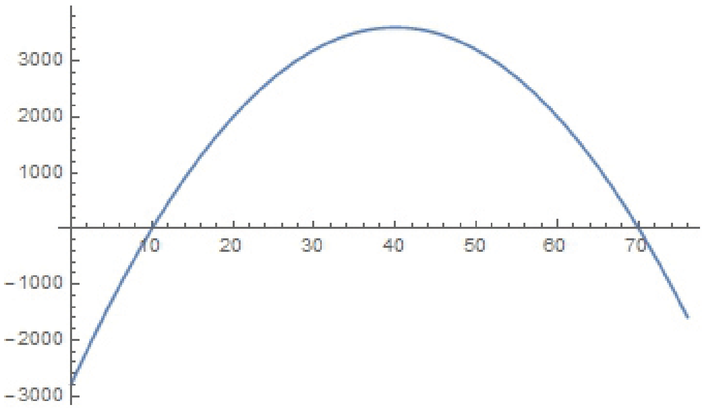
$$X_{vértice} = \frac{-b}{2a} = \frac{-320}{2(-4)} = \frac{-320}{-8} = 40$$

Fazendo $x = 40$, temos

$$L(40) = -4(40)^2 + 320(40) - 2800 = 3600$$

Assim, quando 40 unidades são vendidas e produzidas, o lucro máximo de R$ 3600,00 é feito.

Gráfico 2.8- Exemplo 2.6 - $\boldsymbol{L(x) = -4x^2 + 320x - 2800}$



Fonte: Elaborado pelos autores. Desenvolvido no Wolfram Mathematica.

Exemplo 2.7 - Equilíbrio de Mercado

A função da demanda por um produto é dada por $p(q + 40) = 1000$ e a função da oferta é dada por $p - q - 10 = 0$. Encontre o equilíbrio do mercado.

Solução

Resolvendo $p - q - 10 = 0$ para p, temos $p = q + 10$. Substituindo p em $p(q + 40) = 1000$ e resolvendo a equação:

$$(q + 10)(q + 40) = 1000$$

$$q^2 + 50q + 400 = 1000$$

$$q^2 + 50q - 600 = 0 \Rightarrow x_1 = -60, x_2 = 10$$

Assim, o equilíbrio de mercado ocorrerá com 10 produtos vendidos, ao preço de $p = (10) + 10 = R\$20{,}00$ cada um.

2.3 Funções Exponenciais e Logarítmicas[6]

Equações e Funções exponenciais fazem parte diretamente da vida cotidiana. Várias são suas aplicações.

Definimos função exponencial como qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $f(x) = a^x$, sendo que $a > 0$ e $a \neq 1$. Quando $a > 1$ essa função será crescente, e quando $0 < a < 1$ a função será decrescente.

A função inversa da exponencial é a logarítmica, que são todas as funções em que a incógnita é a base de um logaritmo ou seu logaritmando, onde

$$\log_x a = b \Rightarrow x^b = a$$

Neste capítulo, apresentaremos algumas aplicações de funções exponenciais e logarítmicas.

2.3.1 Pressão da artéria Aorta[7]

Pesquisas médicas apontam que durante curtos períodos de tempo, quando as válvulas da artéria aorta de um adulto normal fecham, a pressão nela em função do tempo pode ser modelada pela seguinte equação:

$$P = 95e^{-0{,}491t}$$

com t em segundos.

6. Traduzido e adaptado de Reynolds (2013).

7. Maior e mais importante artéria do corpo humano.

Exemplo 2.8 – Pressão da artéria

Quanto tempo passará antes que a pressão da artéria aorta atinja 70?

Solução

Fazendo $P = 70$ e resolvendo para t, encontraremos o tempo percorrido antes de a pressão atingir 70.

$$70 = 95e^{-0{,}491t} \Rightarrow \frac{70}{95} = e^{-0{,}491t}$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados:

$$\ln\left(\frac{70}{95}\right) = \ln(e^{-0{,}491t}) \Rightarrow -0{,}305 = -0{,}491t$$

$$t = \frac{-0{,}305}{-0{,}491} = 0{,}621\ s$$

Assim, o tempo para que a pressão atinja 70 é de 0,621 segundos.

2.3.2 Populações Selvagens

A equação de Gompertz

$$N = 100(0\ 03)^{0{,}2^t}$$

descreve o tamanho de um rebanho de cervos de uma pequena ilha t décadas a partir deste momento.

Exemplo 2.9 – Populações Selvagens

Durante em quantos anos a população alcançará ou superará 80?

Solução

Resolvendo a equação para $N = 80$

$$80 = 100(0{,}03)^{0{,}2^t}$$

$$0{,}8 = (0{,}03)^{0{,}2^t}$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados e resolvendo para t:

$$\ln(0{,}8) = \ln[(0{,}03)^{0{,}2^t}] = 0{,}2^t \ln(0{,}03)$$

$$\frac{\ln(0{,}8)}{\ln(0{,}03)} = 0{,}2^t$$

$$\ln\left(\frac{\ln(0{,}8)}{\ln(0{,}03)}\right) = \ln(0{,}2^t)$$

$$\ln(0{,}063) \approx t(-1{,}609)$$

$$\frac{-2{,}764}{-1{,}609} \approx t \Rightarrow t \approx 1{,}71 \text{ décadas}$$

A população excederá 80 em pouco mais de 17 anos.

2.4 Função exponencial na música[8]

Matemática e música constituem um par indissociável. Dentro do universo musical, encontramos a matemática dentro das notas, dos intervalos, na montagem dos instrumentos, e em outros diversos momentos.

O conjunto das notas musicais é constituído por 7 notas, (Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si, que, para facilitar a leitura, vamos representar pelas letras C, D, E, F, G, A, B respectivamente) e seus acidentes, que são assinalados pelos símbolos # e *b*, que representam, respectivamente, "sustenido" e "bemol", com a nota, e assim temos também o C# ou D*b*, D# ou E*b*, F# ou G*b*, G# ou A*b* e A# ou B*b*.

Ao total, são 7 notas musicais e seus 5 acidentes, totalizando 12 semitons.

Tomando a nota Dó (C) como referência (nota fundamental), podemos dar nomes aos intervalos formados pelos semitons seguintes. O Quadro 2.1 exibe a nomenclatura.

Quadro 2.1 – Intervalos entre as notas musicais

Notas envolvidas		Intervalo	Semitons
Dó	Ré Bemol	Segunda Menor	1
Dó	Ré	Segunda Maior	2
Dó	Mi Bemol	Terça Menor	3
Dó	Mi	Terça Maior	4
Dó	Fá	Quarta Justa	5
Dó	Fá Sustenido	Quarta Aumentada	6
Dó	Sol Bemol	Quinta Diminuta	6

8. Modesti e Thiel (2015)

Notas envolvidas		Intervalo	Semitons
Dó	Sol	Quinta Justa	7
Dó	Sol Sustenido	Quinta Aumentada	8
Dó	Lá Bemol	Sexta Menor	8
Dó	Lá	Sexta Maior	9
Dó	Si bemol	Sétima Menor	10
Dó	Si	Sétima Maior	11
Dó	Dó	Oitava	12

Fonte: Adaptado de Lobo (2010).

Ao observar a frequência característica de cada uma dessas notas, notamos um crescimento exponencial. Adicionado ao fato de que quando atingimos uma oitava (percorremos os 12 semitons e voltamos à nota inicial), a frequência dobra. Com esses dados, podemos modelar em uma função exponencial, dada pela seguinte lei de formação:

$$f(x) = f_0 \cdot 2^{\frac{x}{12}}$$

onde f_0 é a chamada nota fundamental (nota inicial) e x é o número de semitons percorridos para se chegar à nota pretendida.

Exemplo 2.10 – Cálculo da Frequência

Tendo a nota dó (C) como nota fundamental, sabendo que ela tem uma frequência de aproximadamente 261,6 Hz (Hertz, unidade de frequência) e utilizando o Quadro 2.1 para consultas:

a) Calcule a frequência da sexta menor dessa nota;
b) Calcule a frequência da terça maior dessa nota;
c) Verifique que a frequência da oitava dessa nota é o dobro da nota fundamental.

Solução

a) Utilizando o Quadro 1, vemos que a sexta menor da nota Dó é o Lá Bemol, e que ele fica a 8 semitons da nota fundamental. Assim, temos $f_0 = 261{,}6$ (frequência da nota Dó) e $x = 8$. Substituindo na equação:

$$f(8) = 261{,}6 \cdot 2^{\frac{8}{12}} \approx 415{,}15\ Hz$$

b) Do Quadro 1, a terça maior do Dó é o Mi, com 4 semitons de distância. Assim, $f_0 = 261{,}6$ e $x = 4$

$$f(4) = 261{,}6 \cdot 2^{\frac{4}{12}} \approx 329{,}59\ Hz$$

c) Neste item, temos $x = 12$.

$$f(12) = 261{,}6 \cdot 2^{\frac{12}{12}} = 523{,}2\ Hz$$

2.5 Escala Richter[9]

Em 1935, Charles Richter, trabalhando com Dr. Beno Gutenberg, desenvolveu uma relação entre a magnitude M de um terremoto e a quantidade de energia E que ele irradia. A relação pode ser descrita pela equação logarítmica

$$\log E = 11{,}8 + 1{,}5\ M$$

onde $\log E$ é o logaritmo na base 10 de E, que é medido em *ergs*.

O Quadro 2.2 indica a relação entre a magnitude dos terremotos e seus efeitos.

Quadro 2.2 – Escala Richter e Efeitos dos terremotos

Magnitude na Escala Richter	Efeitos
Menor que 3,5	Registrado, mas geralmente não sentido.
3,5 - 5,4	Sentido, mas não causa danos
5,4 - 6,0	Pequenos danos em construções
6,1 - 6,9	Destrutivo em até cerca de 105 km do epicentro do terremoto
7,0 - 7,9	Grande Terremoto. Causa sérios danos por grandes áreas
Maior que 8,0	Terremoto Gigantesco. Causa danos sérios por milhares de quilômetros

Fonte: Adaptado de Gordon, Wang e Materowski (2007).

Exemplo 2.11 – Energia do Terremoto

O terremoto de 1906 em São Francisco – EUA registrou 8,3 na escala Richter. Determine a energia do terremoto.

Solução

Substituindo $M = 8{,}3$ na expressão

$$\log E = 11{,}8 + 1{,}5\ M$$

temos:

$$\log E = 11{,}8 + 1{,}5 \times 8{,}3 = 24{,}25$$

9. Traduzido e adaptado de Gordon, Wang e Materowski (2007).

Reescrevendo a expressão, temos:

$$E = 10^{24,25} \approx 1,78 \times 10^{24} \text{ ergs}$$

Exemplo 2.12 – Magnitude do Terremoto

Qual é a magnitude de um terremoto que libera $1,23 \times 10^{19}$ *ergs?*

Solução

Substituindo na equação, temos:

$$\log 1,23 \times 10^{19} = 11,8 + 1,5M$$

ou

$$19,0899 = 11,8 + 1,5M \;\Rightarrow\; M = 4,9$$

Exemplo 2.13

Qual relação pode ser estabelecida entre dois terremotos com magnitudes que diferem em 1 grau na Escala Richter?

Solução

Chamaremos de E_1 a energia associada ao terremoto de magnitude M e E_2 a energia associada ao terremoto de magnitude $M + 1$. Temos as seguintes equações:

$$\log E_1 = 11,8 + 1,5M$$

e

$$\log E_2 = 11,8 + 1,5\,(M + 1)$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, temos

$$\log E_2 - \log E_1 = 1,5$$

Reescrevendo como um único logaritmo, temos:

$$\log \frac{E_2}{E_1} = 1,5$$

Resolvendo para E_2:

$$\frac{E_2}{E_1} = 10^{1,5} \approx 31,6228$$

ou

$$E_2 = 31,6228\, E_1$$

EXERCÍCIOS

01 – Dadas as funções de custo e receita a seguir, encontre a função lucro, o custo, receita e lucro marginal, e o ponto de equilíbrio. Por fim, esboce o gráfico das funções custo e receita, identificando o ponto de equilíbrio:

a) $C(x) = 5x + 15 \quad R(x) = 9x + 3$

b) $C(x) = x + 35, \quad R(x) = 4x - 10$

c) $C(x) = 2x + 40, R(x) = 11x - 5$

02 – Dadas as funções custo e receita, identifique a função lucro. A seguir, encontre o ponto que essa função tem seu valor máximo:

a) $C(x) = -x^2 - 25, \qquad R(x) = -2x^2 + 70x - 350$

b) $C(x) = -5x^2 + 30x, \qquad R(x) = 4x^2 + 136x - 1350$

c) $C(x) = 3x^2 - 80x + 500, R(x) = 2x^2 + 200x - 19000$

03 – Determine quanto tempo passará para que a pressão da artéria aorta atinja 80.

04 – Determine em quantos anos a população de cervos de uma ilha superará 95 animais.

05 – Utilizando a nota dó (C) como nota fundamental, sabendo que ela tem uma frequência de $\approx 261,6$ Hz e utilizando o Quadro 2.1 para consultas, calcule:

a) A frequência da sétima maior desta nota.

b) A frequência da quinta justa desta nota.

c) A frequência da sexta maior desta nota.

06 – Qual é a energia liberada por um terremoto de magnitude de 12 graus na Escala Richter?

07 – Qual foi a magnitude de um terremoto que liberou 5×10^{30} ergs de energia?

CAPÍTULO 3 - CÁLCULO DIFERENCIAL

3.1 Cálculo Diferencial de uma variável[10]

Um dos usos mais importantes do cálculo diferencial é a busca de pontos de máximo e mínimo de funções. Podemos trazer alguns exemplos e, utilizando os conceitos já abordados no Capítulo 2, desenvolver as aplicações.

Seja $f: X \longrightarrow R$ e $a \in X$. A *derivada* de f no ponto a é o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\mathrm{h} \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{\mathrm{h}}$$

A derivada de f no ponto a é o coeficiente angular da reta tangente a f no ponto de abscissa a.

Exemplo 3.1 – Maximizando a Receita de um Comércio

Um produtor de aparelhos de som determinou que, para vender x unidades de um produto, seu preço por unidades dever ser dado pela seguinte função:

$$P(x) = 1000 - x$$

Ele também determinou que o custo de produção de x unidades será dado pela função

$$C(x) = 4000 + 16x$$

a) Formule a função Receita.

b) Formule a função Lucro.

c) Quantas unidades devem ser produzidas e vendidas para maximizar o lucro?

d) Qual é o lucro máximo?

e) Qual é o preço por unidade que será cobrado no ponto do lucro máximo?

Solução

a) A receita será dada por:

$$R(x) = \textit{Receita total} = \textit{(número de unidades vendidas)} \cdot \textit{(preço)}$$
$$R(x) = x \cdot p(x) = x(1000 - x) = 1000x - x^2$$

10. O texto e os exemplos dessa seção foram traduzidos e adaptados de Bittinger, Ellenbogen e Surgent (2012).

b) A função lucro será dada por:

$$L(x) = R(x) - C(x)$$
$$L(x) = 1000x - x^2 - (4000 + 16x)$$
$$L(x) = -x^2 + 984x - 4000$$

c) Para achar o máximo da função lucro, iremos derivar essa função e achar o ponto crítico x.

$$L'(x) = -2x + 984$$
$$L'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 984 = 0 \Rightarrow x = 492$$

Substituímos na segunda derivada, que é:

$$L''(x) = -2$$

Note que esse valor é constante. Assim, $L''(492) = -2$, e 492 é ponto de máximo.

d) O lucro máximo é dado por $P(492)$

$$P(492) = -(492)^2 + 985 \cdot (492) - 4000 = 238.556{,}00$$

Assim, o lucro máximo é de R$ 238.556,00

e) O preço por unidade cobrado no ponto de lucro máximo será:

$$p = 1000 - 492 = R\$508{,}00$$

Exemplo 3.2 – Determinando o Preço de um Ticket

Promotores de um grande festival de rock trabalham em uma fina linha entre o lucro e o prejuízo, especialmente quando determinam o preço para exibições em formato pay-per-view em teatros locais. Pelos registros, para um teatro que cobra um preço de R$ 26,00, cerca de 1.000 pessoas assistem pelo sistema. Por cada um real que diminuem do preço, o número aumenta em 50 espectadores. Sabendo que cada um deles gasta cerca de R$ 4,00 em comidas/bebidas, qual deve ser o preço do ingresso para maximizar a receita?

Solução

Consideraremos x o número de reais que devem ser decrescidos dos R\$ 26,00 originais. Devemos inicialmente escrever a função receita:

$$R(x) = \text{(Renda dos Tickets)} + \text{(Renda dos comes e bebes)}$$

$$= \text{(Número de pessoas)} \cdot \text{(Preço do Ticket)} + \text{(Número de pessoas)} \cdot 4$$

$$= (1000 + 50x)(26 - x) + (1000 + 50x) \cdot 4$$

$$= 26.000 - 1000x + 1300x - 50x^2 + 4000 + 200x$$

$$R(x) = -50x^2 + 500x + 30.000$$

Devemos agora achar o(s) ponto(s) crítico(s) da função:

$$R'(x) = -100x + 500$$

$$-100x + 500 = 0 \Rightarrow x = 5$$

5 é um valor crítico. Devemos avaliar na segunda derivada para verificar se é um ponto de máximo, mínimo ou inflexão.

$$R''(x) = -100$$

$R''(x)$ é uma função constante, assim, $R''(5) = -100$, e 5 é um valor de máximo. Assim, para maximizar o lucro, o preço do ingresso deve diminuir em 5 reais:

$$26 - 5 = R\$\,21{,}00$$

Com um total de $(1000 + 50 \cdot 5) = 1250$ pessoas, com uma renda total de $(1250)(21) + (1250) \cdot 4 = R\$\,31.250{,}00$.

3.1.1 Derivadas na Física

Cinemática

Sabe-se que a posição, velocidade e aceleração são valores que se relacionam. A velocidade pode ser obtida a partir da variação da posição (ou deslocamento) em relação ao tempo, e a aceleração, a partir da variação da velocidade com relação ao tempo. Assim:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{dx}{dt}$$

De maneira análoga para aceleração:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

É comum, na física, utilizar outro símbolo para indicar uma derivada: a derivada da função posição, x, é representada por $\dot{x}$.

Assim:

$$v = \dot{x} \text{ e } a = \dot{v} = \ddot{x}$$

Quando as funções das grandezas são vetoriais, faz-se a derivada de cada uma das componentes do vetor.

Exemplo 3.3

A função da posição de uma partícula é dada por: $x(t) = 9t\,\hat{\imath} + 3t^2\,\hat{\jmath} + 2t^4\,\hat{k}$. Encontre as funções velocidade e aceleração.

Solução

Sabemos que $v = \dot{x}$. Assim

$$v = \frac{d\left[9t\,\hat{\imath} + 3t^2\,\hat{\jmath} + 2t^4\,\hat{k}\right]}{dt} = \frac{d[9t]}{dt}\hat{\imath} + \frac{d[3t^2]}{dt}\hat{\jmath} + \frac{d[2t^4]}{dt}\hat{k}$$

$$v = 9\hat{\imath} + 6t\,\hat{\jmath} + 8t^3\hat{k}$$

Para a aceleração, lembre-se que $a = \dot{v}$. Assim:

$$a = \frac{d\left[9\hat{\imath} + 6t\,\hat{\jmath} + 8t^3\hat{k}\right]}{dt} = \frac{d[9]}{dt}\hat{\imath} + \frac{d[6t]}{dt}\hat{\jmath} + \frac{d[8t^3]}{dt}\hat{k}$$

$$a = 6\,\hat{\jmath} + 24t^2\,\hat{k}$$

Força e Momento Linear

Ao escrever sua Segunda Lei, Isaac Newton definiu primeiramente o que ele chamou de "quantidade de movimento", conhecida hoje como momento linear, ou simplesmente, momento. Dessa definição, temos a fórmula para cálculo do momento linear:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

onde $\vec{p}$ é o momento linear, m é a massa do corpo, e $\vec{v}$, sua velocidade.

Derivando em ambos os lados:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d[m \cdot \vec{v}]}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

Como m é constante, sua derivada é zero. Dessa maneira,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Como $a = \dot{v}$,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = F_R$$

Assim, a força resultante de um corpo é a variação (derivada) de seu momento linear com relação ao tempo.

Outros exemplos

Outros exemplos de derivadas na física são na Cinemática de Rotação, Estática de Fluídos, e muitas outras áreas.

3.2 Cálculo Diferencial de várias variáveis[11]

Normalmente, na vida cotidiana, são poucas as funções que podem ser expressas em termos de duas variáveis. Existem muitas outras coisas que influenciam os acontecimentos diários. Problemas de maximização e minimização também acontecem no cálculo de várias variáveis.

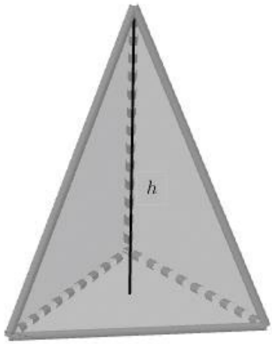
No exemplo a seguir, usaremos os Multiplicadores de Lagrange para determinar pontos de máximo ou mínimo de uma função de várias variáveis.

Exemplo 3.4

Determine onde deve se encontrar o vértice de pirâmide de base triangular para que, ao construí-la, dado o triângulo da base, com arestas medindo a_1, a_2 e a_3, volume V, e fixada uma altura h, usemos a menor área possível.

11. Traduzido e adaptado de Audrox (2007).

Figura 3.1 – Pirâmide com altura e volume fixos

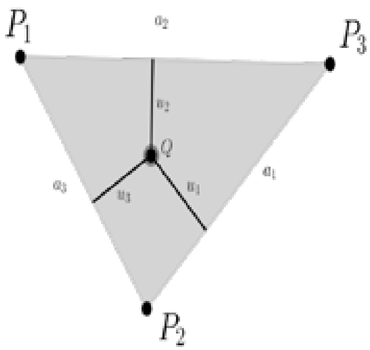


Fonte: Elaborado pelos autores.

Solução

Sabemos que $Vol = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$. Como a altura é fixa, devemos analisar onde deve estar o vértice da pirâmide. Olhando para a base, temos, além do vértice, que queremos determinar, de coordenadas $P = (x, y, h)$, $P_1 = (x_1, y_1, 0)$, $P_2 = (x_2, y_2, 0)$ e $P_3 = (x_3, y_3, 0)$, como é mostrado na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Base da pirâmide



Fonte: Elaborado pelos autores

Vamos chamar de Q o ponto da projeção da altura da pirâmide no plano da base. Assim, as coordenadas de Q serão $(x, y, 0)$. A distância de Q até cada um dos lados é representada por u_1, u_2 e u_3.

A distância da intersecção de u_3 com a_3 até o vértice da pirâmide (altura da face) é dada por $\sqrt{u_3^2 + h^2}$. De forma análoga, as demais são $\sqrt{u_2^2 + h^2}$ e $\sqrt{u_1^2 + h^2}$.

A soma das áreas das faces será dada por:

$$\tfrac{1}{2}a_1\sqrt{u_1^2 + h^2} + \tfrac{1}{2}a_2\sqrt{u_2^2 + h^2} + \tfrac{1}{2}a_3\sqrt{u_3^2 + h^2}$$

Assim, temos uma função de três variáveis:

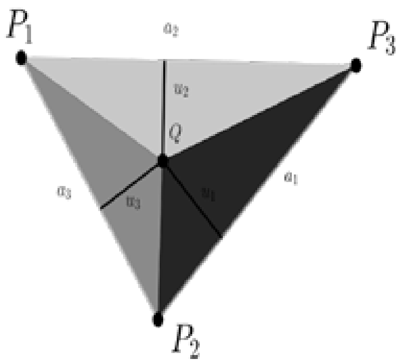
$$f(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2}a_1\sqrt{u_1^2 + h^2} + \frac{1}{2}a_2\sqrt{u_2^2 + h^2} + \frac{1}{2}a_3\sqrt{u_3^2 + h^2}$$

Decompondo a base em três pequenos triângulos (Figura 3.3), a área total da base será a soma das áreas dos 3 pequenos triângulos:

$$Area_b = \tfrac{1}{2}a_1u_1 + \tfrac{1}{2}a_2u_2 + \tfrac{1}{2}a_3u_3 \text{ (Constante)}$$

Chamaremos essa função constante de $g(u_1, u_2, u_3)$.

Figura 3.3 – Base dividida em três triângulos



Fonte: Elaborado pelos autores.

A seguir, usaremos o *Método dos Multiplicadores de Lagrange*. Este método consiste em duas etapas, e é utilizado para determinar os valores de máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ sujeito a $g(x, y, z) = k$, desde que os valores existam e $\nabla g \neq 0$ sobre o plano $g(x, y, z) = k$.

A primeira delas é determinar todos os valores de λ tais que

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

O segundo passo é substituir o ponto em f e verificar se ele é de máximo ou de mínimo da função.

Dessa forma, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{1}{2} a_1 \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + h^2}} = \lambda \frac{1}{2} a_1 \Rightarrow \lambda = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + h^2}}$$

De forma análoga, utilizando as outras duas derivadas parciais:

$$\lambda = \frac{u_2}{\sqrt{u_2^2 + h^2}}$$

$$\lambda = \frac{u_3}{\sqrt{u_3^2 + h^2}}$$

Do princípio da transitividade resulta:

$$\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + h^2}} = \frac{u_2}{\sqrt{u_2^2 + h^2}} = \frac{u_3}{\sqrt{u_3^2 + h^2}}$$

Como h é constante, concluímos que $u_1 = u_2 = u_3$. Logo, para minimizar a área da construção da pirâmide, com as condições dadas, o ponto Q (e por consequência, o vértice da pirâmide) deve se localizar sobre o incentro do triângulo da base.

EXERCÍCIOS

01 – O lucro de uma empresa é dado por $L(x) = -7x^2 + 1680x - 6000$. Quantas unidades x devem ser vendidas para que o lucro seja máximo?

02 – Para cada quarto ocupado, um hotel cobra R$ 350,00 a diária, e assim, consegue preencher 100 dos seus quartos. Para cada 100 reais que retiram do preço, 5 quartos a mais são ocupados. Sabendo que cada quarto tem um gasto de em média 50 reais de serviços, quanto deve custar a diária para maximizar a receita do hotel?

03 – Suponha agora que o lucro do hotel do exercício 2 é dado pela função $L(x) = -3x^2 + 816x - 1800$, onde x é o preço da diária. Qual deve ser o preço da diária para maximizar o lucro?

CAPÍTULO 4 – CÁLCULO INTEGRAL

Definimos a integral indefinida de uma função f como a antiderivada (também chamada de primitiva) da função. Assim:

$$\int f(x)dx = F(x)$$

onde $F'(x) = f(x)$ para cada x do intervalo.

Para a integral definida de uma função f, utilizamos o Teorema Fundamental do Cálculo, onde:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

novamente, onde , sendo f contínua neste intervalo $[a, b]$. Em suma, utilizando o processo conhecido como Somas de Riemann, essa integral calcula basicamente a área sob uma função em seu gráfico.

4.1 Modelos de Crescimento e Decrescimento Exponencial[12]

Todo modelo de crescimento ou decrescimento exponencial é da forma

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

ou

$$P(t) = P_0 e^{-kt}$$

onde t representa o tempo, k é uma constante, e P_0 é a quantidade inicial (em $t = 0$) do sistema estudado.

Podemos integrar essas funções de 0 até um tempo T:

$$\int_0^T P_0 e^{kt}\, dt = \left[\frac{P_0}{k} \cdot e^{kt}\right]_0^T = \frac{P_0}{k}\left(e^{kT} - e^{k0}\right) = \frac{P_0}{k}\left(e^{kT} - 1\right)$$

12. Traduzido e adaptado de Bittinger, Ellenbogen e Surgent (2012)

De forma análoga:

$$\int_0^T P_0 e^{-kt}\, dt = \left[\frac{P_0}{k} \cdot e^{kt}\right]_0^T = \frac{P_0}{k}(-e^{-kT} + e^{k0}) = \frac{P_0}{k}(1 - e^{-kT})$$

Essas são as fórmulas básicas para qualquer cálculo de decaimento e crescimento.

O texto e os exemplos a seguir foram traduzidos e adaptados de Bittinger, Ellenbogen e Surgent (2012).

4.1.1 Valor Futuro

Definição 4.1: Se P_0 é investido por t anos, a uma taxa de juros k, então

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

onde $P = P_0$ em $t = 0$. O valor P é chamado **Valor Futuro** de P_0 reais investidos a uma taxa de juros k, por t anos.

Exemplo 4.1 – Valor Futuro de um investimento

Encontre o valor futuro de R$ 4.000,00 investidos por 3 anos, a uma taxa de juros de 5% ao ano.

Solução

Usando a equação da Definição 4.1, com $P_0 = 4000$, $k = 0{,}05$ e $t = 3$, temos:

$$P(3) = 4000e^{0{,}05(3)} = 4000e^{0{,}15} \approx R\$\, 4647{,}33$$

O valor futuro de R$ 4.000,00, após 3 anos, será aproximadamente R$ 4.647,33.

4.1.2 Valor futuro acumulado e fluxo de renda contínuo

Vamos considerar uma situação envolvendo acumulação de valores futuros. O dono de um estacionamento recebe o lucro anual de R$ 4.000,00 ao final de cada um de 4 anos. Ele investe os R$ 4.000,00 a juros anuais de 5%. Quando ele recebe seus primeiros R$ 4.000,00, ele o investe por 4 – 1 anos, ou seja, 3 anos. O valor futuro será, como vimos no exemplo 4.1, R$ 4.647,33. Com os R$ 4.000,00 do segundo ano, ele investe por 4 – 2 anos, ou 2 anos, com valor futuro de $4000e^{0{,}05(2)}$ = R$ 4.420,68. Do terceiro ano, os R$ 4.000,00 terão valor futuro de $4000e^{0{,}05(1)} = 4205{,}08$. O valor do quarto ano será investido por 0 anos, assim, ele será o próprio valor futuro. O **valor futuro acumulado** será a soma dos quatro valores futuros.

$$4647{,}33 + 4420{,}68 + 4205{,}08 + 4000 = R\$\, 17.273{,}09$$

Agora, vamos supor que o dono do estacionamento receba o mesmo lucro R$ 4.000,00, mas em 365 parcelas de aproximadamente R$ 10,96. Cada dia, ele pegará seu lucro, e investirá a mesma taxa de 5% ao ano, até o fim dos 4 anos. O investimento do primeiro dia cresce a

$$\frac{4000}{365}e^{0,05(4-1/365)} \approx 10{,}96e^{0,05(4-1/365)} \approx R\$\ 13{,}3847$$

uma vez que esse valor será investido pelo restante dos 4 anos, ou seja, $4 - 1/365$. O investimento do segundo dia cresce a

$$\frac{4000}{365}e^{0,05(4-2/365)} \approx 10{,}96e^{0,05(4-2/365)} \approx R\$\ 13{,}3829$$

até o fim do quarto ano, por todos os dias, durante o período. Assumindo que todos os depósitos sejam feitos na mesma conta e nas datas corretas, o valor futuro total é:

$$\frac{4000}{365}e^{0,05(4-1/365)} + \frac{4000}{365}e^{0,05(4-2/365)} + \cdots + \frac{4000}{365}e^{0,05(4-4)}$$

Reorganizando a soma:

$$\frac{4000}{365} + \cdots + \frac{4000}{365}e^{0,05(4-2/365)} + \frac{4000}{365}e^{0,05(4-1/365)}$$

Chamaremos $\Delta t = \frac{1}{365}$, e assim, temos uma Soma de Riemann, com t em anos, que pode ser aproximado pela integral:

$$\int_0^4 4000e^{0,05t}\, dt$$

Calculando essa integral, temos:

$$\int_0^4 4000e^{0,05t}\, dt = \left[\frac{4000}{0{,}05}\left(e^{0,05(4)} - 1\right)\right] \approx R\$\ 17.712{,}20$$

Esse valor é chamado de **valor futuro acumulado de um fluxo de renda contínua**.

Exemplo 4.2 - Ganhos sobre uma seguradora

Um cirurgião recebia anualmente R$ 500.000,00, mas, se acidentou com seu carro, e não pode mais realizar cirurgias. Em um acordo com a seguradora, ele garantiu uma renda contínua de R$ 250.000,00 pelos próximos 20 anos, metade do que ele ganharia normalmente, porém ele ainda pode atender pacientes, desde que sentado.

Ele investiu o dinheiro da seguradora à taxa de 2,8% ao ano. Encontre o valor futuro acumulado quando se completarem os 20 anos do seguro.

Solução

Nossa função será $R(t) = 250.000e^{0,028t}$. Integrando de 0 a 20:

$$\int_0^{20} R(t)\,dt = \int_0^{20} 250.000e^{0,028t}\,dt = \frac{250.000}{0,028}\left(e^{0,028(20)} - 1\right) \approx$$

$$\approx \text{R\$ } 6.702.433{,}03$$

O valor futuro acumulado, ao final dos 20 anos pelo cirurgião será aproximadamente R$ 6.702.433,03.

4.2 Probabilidade

Definição 4.2: Seja x uma variável aleatória. Uma função f é dita **Função Densidade de Probabilidade** se:

I) Para todo x no domínio de f, exista $0 \leq f(x)$.

II) A área sob o gráfico é 1.

III) Para qualquer intervalo $[c, d]$ no domínio, a probabilidade de x pertencer a este intervalo é dada por:

$$P([c,d]) = \int_c^d f(x)\,dx$$

Exemplo 4.3

Verifique o segundo tópico da definição 4.2, na função f dada por:

$$f(x) = \frac{3}{117}x^2, \text{para } 2 \leq x \leq 5$$

Solução

$$\int_2^5 \frac{3}{117}x^2 dx = \frac{3}{117}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^5 = \frac{1}{117}(5^3 - 2^3) = \frac{117}{117} = 1$$

Exemplo 4.4 – Fábrica de Lâmpadas

Uma fábrica que produz lâmpadas fluorescentes determina a vida útil t da lâmpada de 3 a 6 anos, e usa a função densidade de probabilidade dada por:

$$f(t) = \frac{24}{t^3}, \text{para } 3 \leq t \leq 6$$

a) Verifique o segundo tópico da definição 4.2

b) Encontre a probabilidade de a lâmpada não durar mais que 4 anos.

c) Calcule a probabilidade de a lâmpada durar entre 4 e 5 anos.

Solução

a) Queremos mostrar que:

$$\int_3^6 f(t)dt = 1$$

Integrando no intervalo:

$$\int_3^6 \frac{24}{t^3}\, dt = 24\left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_3^6 = -12\left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{3^2}\right) = -12\left(-\frac{3}{36}\right) = 1$$

b) A probabilidade de a lâmpada durar menos de 4 anos é dada por $P(3 \leq t \leq 4)$.

$$\int_3^4 \frac{24}{t^3}\, dt = 24\left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_3^4 = -12\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{3^2}\right) = -12\left(-\frac{7}{144}\right) = \frac{7}{12}$$

A probabilidade é de $\frac{7}{12}$, ou 58%.

c) A probabilidade de a lâmpada durar de 4 a 5 anos é dada por $P(4 \leq t \leq 5)$.

$$\int_4^5 \frac{24}{t^3}\, dt = 24\left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_4^5 = -12\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{4^2}\right) = -12\left(-\frac{9}{400}\right) = \frac{27}{100}$$

A probabilidade é de $\frac{27}{100}$, ou 27%.

4.2.1 Construindo Funções Densidade de Probabilidade

Suponha que você tenha uma função arbitrária não negativa $f(x)$, cuja integral definida sobre um intervalo $[a, b]$ é igual a K. Então:

$$\int_a^b f(x)dx = K$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $1/K$, temos:

$$\frac{1}{K}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{K}K\,, \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b \frac{1}{K}f(x)dx = 1$$

Assim, quando multiplicamos $f(x)$ por $1/K$ nós temos uma função cuja área sob o gráfico no intervalo dado é 1 e a função satisfaz a definição 4.2.

Exemplo 4.5

Ache o k tal que $f(x) = kx^2$ é uma função densidade de probabilidade no intervalo $[1, 4]$. A seguir, escreva essa função.

Solução

Temos:

$$\int_1^4 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{63}{3} = 21$$

Assim, para f ser uma função densidade de probabilidade, $k = \frac{1}{21}$, e a função é:

$$f(x) = \frac{1}{21}x^2, \qquad \text{para } \; 1 \le x \le 4$$

Exemplo 4.6 – Controle de qualidade

Uma companhia produz alarmes de deslizamento de terra para uma cidade do interior do Rio de Janeiro. O barulho máximo, L, acontece quando os alarmes atingem de 70 a 100 decibéis. A função densidade de probabilidade para L é

$$f(L) = \frac{1}{30}, \qquad \text{para } 70 \le L \le 100$$

Um alarme é selecionado aleatoriamente da linha de montagem. Encontre a probabilidade de seu volume máximo estar entre 70 e 91 decibéis.

Solução

A probabilidade é

$$P(70 \leq L \leq 91) = \int_{70}^{91} \frac{1}{30}\, dL = \frac{1}{30}[L]_{70}^{91} = \frac{1}{30}(91 - 70) = 0{,}7$$

Assim, a probabilidade é de 0,7, ou 70%.

Exemplo 4.7- Planejamento de Transporte

A distância x, em metros, entre carros sucessivos em certo trecho de uma rodovia tem a função densidade de probabilidade

$$f(x) = ke^{-kx}, \qquad \text{para } 0 \leq x < \infty$$

onde $k = 1/a$ e a é a distância média entre carros sucessivos por período de tempo. Uma empresa determina que a distância média entre os carros num certo trecho da estrada é de 200 metros. Qual é a probabilidade da distância entre dois carros sucessivo, escolhidos aleatoriamente, ser de 50 metros ou menos?

Solução

Primeiro, determinamos k.

$$k = \frac{1}{200} = 0{,}005.$$

Então, a função densidade de probabilidade é

$$f(x) = 0{,}005e^{-0{,}005x}, \qquad \text{para } 0 \leq x < \infty.$$

A probabilidade de a distância entre dois carros ser 50 metros ou menos é

$$P(0 \leq x \leq 50) = \int_{0}^{50} 0{,}005e^{-0{,}005x}\, dx = \left[\frac{0{,}005}{-0{,}005}e^{-0{,}005x}\right]_0^{50} =$$

$$= -\left(e^{-0{,}005(50)} - e^{-0{,}005(0)}\right) = -(e^{-0{,}25} - 1) \approx 1 - 0{,}77 = 0{,}23$$

Dessa forma, a probabilidade de a distância entre dois carros ser 50 metros ou menos é de cerca de 23%.

4.3 Vazão de sangue em uma artéria[13]

É de conhecimento dos biólogos que a velocidade do sangue, em um ponto de uma artéria será dada em função da distância entre esse ponto e o eixo central da artéria. Conforme a Lei de Poiseuille, a velocidade (medida em centímetros por segundo) do sangue em um ponto a x centímetros do eixo central da artéria é dada por

$$S(r) = k(X^2 - x^2)$$

onde X é o raio da artéria e k é uma constante.

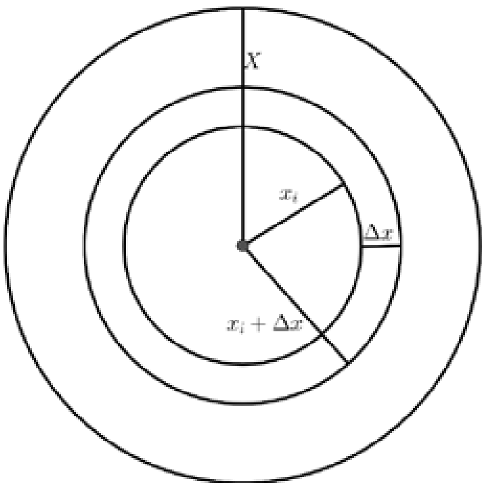
Exemplo 4.8 – Expressão Geral

Determine uma expressão geral para a vazão de sangue de uma artéria de raio X se a velocidade em um ponto a x centímetros do eixo centra é dada pela Lei de Poiseuille.

Solução

Para calcular o valor aproximado de volume de sangue que atravessa uma parte da artéria, vamos dividir o intervalo $0 \leq x \leq R$ em n subintervalos de largura Δx, e x_i o início do subintervalo de ordem i. Tais subintervalos caracterizam n anéis concêntricos, como é mostrado na Figura 4.1

Figura 4.1 – Secção da Artéria



Fonte: Adaptado de Hoffmann e Bradley (2008)

13. Traduzido e adaptado de Hoffmann e Bradley (2008)

Se Δx é pequeno, a área do anel de ordem x_i pode ser aproximada como a área de um retângulo com o comprimento igual à circunferência do limite interno do anel, e a largura é Δx. Assim,

$$\text{Área do anel} \approx 2\pi x_i \Delta x$$

Multiplicando a área do anel de ordem x_i pela velocidade do sangue que o atravessa, obtemos a vazão do sangue neste anel. Como a velocidade nesse ponto poderá ser obtida por $S(x_i)$, temos:

$$V \approx (2\pi x_i \Delta x) \cdot S(x_i)$$

$$\approx (2\pi x_i \Delta x)[k(X^2 - x_i^2)]$$

$$\approx 2\pi k(X^2 x_i - x_i^3)\Delta x$$

A vazão de sangue em toda a secção da artéria será dada pela soma dos n anéis como este. Assim:

$$V \approx \sum_{i=0}^{x} 2\pi k(X^2 x_i - x_i^3)\Delta x$$

Quando x tende a infinito, a somatória tende ao valor exato da vazão:

$$V = \lim_{x\to\infty} \sum_{i=0}^{x} 2\pi k(X^2 x_i - x_i^3)\Delta x$$

$$= \int_0^X 2\pi k(X^2 x - x^3)\, dx$$

$$= 2\pi k\left(\frac{X^2}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)$$

Variando de 0 a X:

$$V = \frac{\pi k X^4}{2}$$

que representa a vazão do sangue em uma artéria de raio X em centímetros cúbicos por segundo.

4.4 Integrais na Física

Cinemática: Vimos no capítulo 3 que $v = \dot{x}$ e $a = \dot{v} = \ddot{x}$. Como sabemos que a integral é a operação inversa da derivada, temos:

$$x = \int v(t)dt \ \text{ e } v = \int a(t)dt$$

Trabalho: A aplicação mais notória da integral nas disciplinas de física talvez seja o Trabalho. Trabalho (W) é definido como a aplicação de uma força em um corpo, que produz um deslocamento. O trabalho pode ser calculado como a integral da Força com relação ao deslocamento:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx$$

EXERCÍCIOS

01 – Calcule o valor futuro de R$ 19.793,15 investidos por 7 anos, a uma taxa de juros de 7% ao ano.

02 – Após a morte de sua tia, Jair recebeu uma herança de R$ 50.000,00, que investiu por 16 anos, a 7,3% ao ano, compostos continuamente. Qual é o valor futuro da herança?

03 – Um posto de gasolina modelou o tempo t que seus clientes demoraram para serem atendidos, de acordo com a função densidade de probabilidade

$$f(t) = 2e^{-2t}, \qquad 0 \leq t < \infty$$

Qual é a probabilidade de um cliente ser atendido em menos de três minutos?

04 – Encontre a função densidade de probabilidade sobre o intervalo dado:

a) $f(x) = \frac{1}{9}x^2$, $[3, 7]$

b) $f(x) = 5x$, $[0, 3]$

c) $f(x) = 1/x^2$, $[1, 2]$

d) $f(x) = 9/x^5$ $[7, 9]$

CAPÍTULO 5 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Define-se equação diferencial como qualquer equação, cujas incógnitas são funções, e estão presentes na forma de suas derivadas.

A seguir, apresentaremos uma aplicação do tema, no tocante ao cálculo das mudanças climáticas.

5.1 Mudanças Climáticas[14]

Um simples modelo de emissão de CO_2 com uma emissão constante ω é descrita por:

$$\frac{d^2A}{dt^2} + p\frac{dA}{dt} + qA = r\omega,$$

onde $A(t) = C - A_0$ é a concentração em excesso de CO_2 na atmosfera. Essa é a diferença entre a concentração atual de CO_2, C, com relação à quantidade de CO_2 da era pré-industrial, A_0. Seu valor médio é $A_0 = 280$ ppm (Partes Por Milhão). p e q são chamados de coeficientes de transferência, e r é uma constante.

Assumindo $A = e^{\lambda t}$ e substituindo na equação homogênea

$$\frac{d^2A}{dt^2} + p\frac{dA}{dt} + qA = 0$$

tem-se

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

cujas soluções são

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right), \qquad \lambda_2 = -\frac{p}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right).$$

14. Traduzido e adaptado de Yang (2009).

Para valores típicos de $p = 1{,}007/\text{ano}$ e $q = 0{,}0123/\text{ano}^2$, temos:

$$\lambda_1 \approx -0{,}995, \qquad \lambda_2 \approx -0{,}0124$$

Dessa maneira, a solução homogênea pode ser escrita como

$$A = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}$$

Desde que $|\lambda_1| \gg |\lambda_2|$, o primeiro termo, que tem expoente negativo, se tornará muito pequeno quando t tender para um número muito grande. Na dinâmica climática, a escala de tempo é medida em centenas de anos, então, podemos usar a solução aproximada:

$$A \approx be^{\lambda_2 t}$$

A solução particular A_* pode ser determinada assumindo $A = K$, onde K é uma constante indeterminada, temos $dA/dt = 0$ e $d^2A/dt^2 = 0$, e

$$qK = r\omega$$

ou

$$K = \frac{r\omega}{q}$$

Assim, a solução geral é

$$A = be^{\lambda_2 t} + \frac{r\omega}{q}$$

Uma escala de tempo τ pode ser definida para o sistema, como

$$\tau = \frac{1}{|\lambda_2|} = \frac{1}{0{,}0124} \approx 80 \text{ anos},$$

então, a solução se torna:

$$A = be^{-t/\tau} + \frac{r\omega}{q}$$

Usando os valores comuns de $r = 0{,}884/\text{ano}$, e o valor inicial $A(0) = 0$ *ppm* em $t = 0$, e $\omega \approx 0{,}014/\text{ano}$ (o nível estimado de emissão no ano de 2000, equivalente a 8,4 gigatons/ano), temos:

$$b \times e^0 + \frac{r\omega}{q} = 0$$

ou

$$b = -\frac{r\omega}{q}$$

Então, a solução é:

$$A(t) = \frac{r\omega}{q}(1 - e^{-t/\tau}).$$

Substituindo os valores:

$$A(t) \approx 281{,}7\,(1 - e^{-t/80}).$$

Assim, em longo prazo, o excesso de CO_2 será de 281,7 ppm, e a concentração atual de CO_2 será $281{,}7 + A_0 \approx 561{,}7$ ppm, que é cerca do dobro da concentração pré-industrial.

CAPÍTULO 6 – ÁLGEBRA LINEAR

A Álgebra Linear é a parte da matemática que se ocupa de estudar os vetores, matrizes, sistemas lineares, espaços vetoriais, etc., relacionando essas áreas.

A seguir, apresentaremos algumas aplicações da álgebra linear, para os mais variados níveis de ensino e aprendizagem.

6.1 Construção de retas, curvas e superfícies a partir de pontos dados[15]

6.1.1 Uma reta por dois pontos

Suponha que (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são dois pontos distintos no plano. Então, existe única reta

$$c_1x + c_2y + c_3 = 0$$

que passa pelos dois pontos. Note que c_1, c_2 e c_3 são todos constantes e diferentes de zero.

Substituindo nossos dois pontos inicias na equação, temos:

$$c_1x_1 + c_2y_1 + c_3 = 0$$
$$c_1x_2 + c_2y_2 + c_3 = 0$$

As três equações podem ser agrupadas e reescritas:

$$c_1x + c_2y + c_3 = 0$$
$$c_1x_1 + c_2y_1 + c_3 = 0$$
$$c_1x_2 + c_2y_2 + c_3 = 0$$

Esse sistema linear é homogêneo, e não tem a solução trivial $(0, 0, 0)$, então, o determinante da matriz dos coeficientes é zero. Assim,

15. Traduzido e adaptado de Anton e Rorres (2010).

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Consequentemente, todo ponto (x, y) na reta satisfaz ao determinante.

Exemplo 6.1 – Equação da reta

Encontre a equação da reta que passa pelos pontos (3,1) e (4,7).

Solução

Substituindo as coordenadas dos dois pontos na matriz, chega-se a:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

E o determinante é

$$-6x + y + 17 = 0$$

6.1.2 Uma circunferência por três pontos

Suponha três pontos distintos no plano, (x_1, y_1), $(x_2,\ y_2)$ e (x_3, y_3) não colineares.

A equação geral de uma circunferência é dada por

$$c_1(x^2 + y^2) + c_2x + c_3y + c_4 = 0$$

Substituindo as coordenadas dos três pontos na equação geral, temos

$$c_1(x_1^2 + y_1^2) + c_2x_1 + c_3y_1 + c_4 = 0$$

$$c_1(x_2^2 + y_2^2) + c_2x_2 + c_3y_2 + c_4 = 0$$

$$c_1(x_3^2 + y_3^2) + c_2x_3 + c_3y_3 + c_4 = 0$$

Com as 4 equações, obtém-se um sistema homogêneo, que não admite a solução trivial, então, o determinante da matriz formada por seus coeficientes é zero.

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo 6.2 – Equação da circunferência

Encontre a equação da circunferência que passa pelos pontos (2,8), (7,3) e (5.7).

Solução

Substituímos essas coordenadas no determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 68 & 2 & 8 & 1 \\ 58 & 7 & 3 & 1 \\ 74 & 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante, chega-se à equação da circunferência, expressa por:

$$10\,x^2 - 40\,x + 10\,y^2 - 60\,y - 120 \;=\; 0$$

6.1.3 Uma secção cônica qualquer através de cinco pontos

A equação geral para uma secção cônica no plano (parábola, hipérbole, ou elipse, e suas formas degeneradas) é dada por:

$$c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6 = 0$$

Suponha cinco pontos distintos (x_1, y_1), $(x_2,\ y_2)$, (x_3, y_3), , (x_4, y_4) e (x_5, y_5). Assim como nos tópicos anteriores, podemos organizar todas as equações dos respectivos pontos em um sistema linear. Como a solução trivial não é admitida, o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema é zero.

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo 6.3 – Equação de uma órbita

Um astrônomo que quer determinar a órbita de um asteroide em volta do Sol cria um sistema cartesiano de coordenadas, cujo Sol é a origem do sistema. O sistema de medida escolhido é unidade astronômica (1 unidade astronômica = distância da Terra ao Sol = 1,473 × 10⁸ km). Pela Primeira Lei de Kepler, a órbita deve ser uma elipse, então, o astronauta faz 5 medições, e encontra 5 pontos sobres os quais a órbita está:

$$(8{,}025;\ 8{,}310), (10{,}170;\ 6{,}355), (11{,}202;\ 3{,}212), (10{,}736;\ 0{,}375) \text{ e } (9{,}092;\ -2{,}267)$$

Encontre a equação da órbita desse asteroide.

Solução

Organizamos a matriz com os dados do problema, e calculamos seu determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 64,401 & 66,688 & 69,056 & 8,025 & 8,310 & 1 \\ 103,429 & 64,630 & 40,386 & 10,170 & 6,355 & 1 \\ 125,485 & 35,981 & 10,317 & 11,202 & 3,212 & 1 \\ 115,262 & 4,026 & 0,141 & 10,736 & 0,375 & 1 \\ 82,664 & -20,612 & 5,139 & 9,092 & -2,267 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante, a equação da órbita elíptica desse asteroide será:

$$386.802x^2 - 102{,}896xy + 446{,}029y^2 - 2476{,}433x - 1427{,}998y - 17109{,}375 = 0$$

6.1.4 – Um plano através de três pontos

A equação geral de um plano é dada pela equação

$$c_1x + c_2y + c_3z + c_4 = 0$$

que obrigatoriamente, passa por três pontos não colineares (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) e (x_3, y_3, z_3), e pode ser encontrada a partir do determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo 6.4 – Equação do plano

Encontre a equação do plano que passa pelos pontos (2, 2, 1), (3, 1, 0) e (3, 10, 3).

Solução

Organizamos os pontos no determinante, e temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 10 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

O resultado é:

$$6x - 3y + 9z - 15 = 0$$

6.1.5 Uma esfera através de quatro pontos

A equação geral de uma esfera é dada por:

$$c_1(x^2 + y^2 + z^2) + c_2x + c_3y + c_4z + c_5 = 0$$

Sabe-se que a esfera passa através de quatro pontos não coplanares (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) e (x_4, y_4, z_4), e pode ser encontrada a partir do seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo 6.5 – Equação da Esfera

Encontre a equação da esfera que passa pelos pontos (1, 4, 3), (2, 0, 2), (3, 2, 1) e (6, 2, 4).

Solução

Organizamos os pontos no determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 26 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 8 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 14 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 56 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

O resultado do cálculo do determinante é:

$$-36(x^2+y^2+z^2)+216x+144y+288z-720=0$$

6.2 - Álgebra Linear na Genética[16]

6.2.1 – Herança autossômica

Na herança autossômica, um indivíduo herda os genes de seu pai e sua mãe para formar seu próprio par particular. Tanto quanto é sabido, é o acaso que determina qual gene um pai passa para seus filhos.

Assim, se um dos pais é do genótipo *Aa*, é igualmente provável que a descendência herdará o gene *A* ou o gene *a*. Se um pai é do genótipo *aa* e o outro é do genótipo *Aa*, sua descendência irá certamente receber um gene *a* do primeiro, e irá receber *A* ou *a* do segundo. Assim, o descendente tem a mesma probabilidade de ter seu genótipo *aa* ou *Aa*. No Quadro 6.1 estão relacionadas todas as probabilidades dos possíveis genótipos dos filhos, com relação às combinações dos possíveis genótipos dos pais.

16. Traduzido e adaptado de Anton e Rorres (2010).

Quadro 6.1 – Distribuição Genética

Genótipo dos Filhos	Genótipo dos Pais					
	AA *AA*	*AA* *Aa*	*AA* *aa*	*Aa* *Aa*	*Aa* *aa*	*aa* *aa*
AA	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
aa	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

Fonte: Adaptado de Anton e Rorres (2010).

Exemplo 6.6 – Distribuição de Genótipos em uma população

Suponha que um fazendeiro tenha uma população de plantas, consistindo em alguma distribuição dos três possíveis genótipos AA, Aa e aa. O fazendeiro deseja implementar um programa de reprodução, em que cada planta é sempre fertilizada com uma planta do genótipo AA, e então, é substituída por uma de suas descendentes. Queremos obter uma expressão para a distribuição dos três possíveis genótipos na população após qualquer número de gerações.

Solução

Para $n = 0, 1, 2, \ldots$, vamos chamar

a_n = fração de plantas com o genótipo *AA* na n-ésima geração

b_n = fração de plantas com o genótipo *Aa* na n-ésima geração

c_n = fração de plantas com o genótipo *aa* na n-ésima geração

Assim, a_0, b_0 e c_0 representam a distribuição inicial dos genótipos. Ainda, temos:

$$a_n + b_n + c_n = 1, \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

A partir Quadro 6.1 pode-se determinar a distribuição de cada genótipo de cada geração a partir da distribuição dos genótipos da geração anterior, pelas seguintes equações:

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1}$$

$$b_n = c_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1}$$

$$c_n = 0$$

Por exemplo, a primeira dessas três equações estabelece que toda descendência de uma planta do genótipo *AA* será a soma das plantas com genótipo *AA* antes da execução dessa etapa do programa de reprodução, com a metade da prole das plantas de genótipo *Aa*.

Podemos escrever as equações acima em forma matricial, com a seguinte notação:

$$X^{(n)} = MX^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

onde

$$X^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}, \quad X^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}, \text{e} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que as três colunas da matriz M são as mesmas três primeiras colunas do Quadro 6.1.

Dessa equação matricial, segue que

$$X^{(n)} = MX^{(n-1)} = M^2X^{(n-2)} = \cdots = M^nX^{(0)}$$

Consequentemente, se encontrarmos uma expressão explícita para M^n, podemos usar a relação anterior para obter o valor de $X^{(n)}$. Para calcular M^n, devemos primeiramente diagonalizar M. Isto é, nós procuramos uma matriz inversível P e a matriz diagonal D tal que

$$M = PDP^{-1}$$

Com a diagonalização, temos então:

$$M^n = PD^nP^{-1}, \qquad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

onde

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{bmatrix}$$

Para o processo da diagonalização, devemos calcular os autovalores e os autovetores da matriz M, que são:

Autovalores	$\lambda_1 = 1,$	$\lambda_2 = \frac{1}{2},$	$\lambda_3 = 0$
Autovetores correspondentes	$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$	$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$	$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Assim, temos

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$P = [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$x^{(n)} = PD^nP^{-1}x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

ou

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 + b_0 + c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lembrando que $a_0 + b_0 + c_0 = 1$, temos:

$$a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0$$

$$c_n = 0$$

Essas são as fórmulas para determinar as frações dos três tipos de genótipos na n-ésima geração de plantas, em termos da distribuição inicial.

Como $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tende a zero, quando se aproxima de infinito, podemos concluir das equações acima que

$$a_n \to 1$$

$$b_n \to 0$$

$$c_n = 0$$

quando n é um número muito grande. Isso quer dizer que no limite todas as plantas terão genótipo *AA*.

6.2.2 – Doenças autossômicas recessivas

Existem muitas doenças genéticas regidas por herança autossômica, onde o gene normal *A* domina um gene anormal *a*. O genótipo *AA* é um indivíduo normal, o genótipo *Aa* é portador da doença, mas não a desenvolve, e o genótipo *aa* é afetado pela doença.

Nos seres humanos, essas doenças genéticas são frequentemente associadas com um grupo racial em particular – por exemplo, a fibrose cística (predominantemente entre os caucasianos), anemia falciforme (predominantemente entre pessoas de origem africana), Anemia de Cooley (predominante entre pessoas de origem do mediterrâneo) e a Doença de Tay-Sachs (predominante entre os judeus do Leste Europeu).

Exemplo 6.7- Doença Autossômica Recessiva

Suponha que um criador de animais tem em sua população, animais que transportem uma doença autossômica recessiva. Suponha ainda, que esses animais que estão infectados pela doença não sobreviverão até ficarem adultos.

Uma forma possível de controlar a doença é o criador sempre acasalar uma fêmea, independente do genótipo, com um macho normal. Assim, os descendentes terão ou um pai *e mãe normais (acasalamento genes AA-AA), ou um pai normal e uma mãe portadora da doença, mas sem manifestar (acasalamento genes AA-Aa). Não haverá acasalamentos AA-aa, uma vez que os animais que manifestarem a doença não chegarão à vida adulta. Sob esse programa, os futuros descendentes não manifestarão a doença, embora existirão portadores. Vamos determinar a fração de portadores em gerações futuras. Temos:*

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

onde

a_n = *fração da população com genótipo AA na* n*-ésima geração*

b_n = *fração da população com genótipo Aa na* n*-ésima geração*

Por que cada descendente tem, ao menos, um dos pais com gene *AA*, podemos considerar esse programa controlado como um programa contínuo com o genótipo *Aa*, como no exemplo 6.6. Assim, a transição da distribuição de genes de uma geração à próxima é dada pela equação:

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Como sabemos a distribuição inicial $x^{(0)}$, a distribuição de genótipos na n-ésima geração será dado por

$$x^{(n)} = M^{(n)}\, x^{(0)}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

A diagonalização de M resulta em:

$$x^{(n)} = PD^nP^{-1}x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

Já que $a_0 + b_0 = 1$, temos

$$a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0$$

Quando n tende a infinito, temos

$$a_n \to 1$$
$$b_n \to 0$$

Então, ao passar de muitas gerações, todos os indivíduos serão do genótipo AA, e a doença deixará de existir nesta população.

6.3 Modelo *Input-Output* de Leontief[17]

Considere uma economia simples, baseada em três tipos de *commodities*: produtos agrícolas, produtos manufaturados e combustíveis. Suponha que a produção de unidades de produtos agrícolas requer unidades dos mesmos produtos, unidades de produtos manufaturados e unidade de combustível; que a produção de produtos manufaturados requer uma unidade de produtos agrícolas, de produtos manufaturados e unidades de combustível; e que a produção de 10 unidades de combustível requer uma unidade de produto agrícola, produtos manufaturados e 4 unidades de combustível.

A Tabela 6.1 resume essas informações, em termos de produção de uma unidade.

Tabela 6.1 – Relação entre os produtos

	Saídas (*Outputs*)		
Entradas (*Inputs*)	**Produtos Agrícolas**	**Produtos Manufaturados**	**Combustíveis**
Produtos Agrícolas	0,5	0,1	0,1
Produtos Manufaturados	0,2	0,5	0,3
Combustíveis	0,1	0,3	0,4

Fonte: Adaptado de Harshbarger e Reynolds (2013).

Desta Tabela, podemos escrever uma matriz, que é chamada Matriz de Leontief.

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

O modelo *input-output* de Leontief foi criado por Wassily Leontief. Seu desenvolvimento foi útil para prever efeitos na economia, a partir de mudanças de preço ou mudança de gastos governamentais.

17. Traduzido e adaptado de Harshbarger e Reynolds (2013).

Exemplo 6.8 – O modelo de Leontief

Usando a Tabela 6.1, responda:

a) Quantas unidades de produtos agrícolas e de combustível são necessárias para se produzir unidades de produtos manufaturados?

b) A produção de qual commodity *é menos dependente dos outros dois?*

c) Se o custo do combustível crescer, qual das duas indústrias será mais afetada?

Solução

a) Olhando na segunda coluna da Tabela 6.1, produtos manufaturados, vemos que a produção de uma unidade requer 0,1 unidade de produtos agrícolas e 0,3 unidades de combustíveis. Assim, 100 unidades de produtos manufaturados requerem 10 unidades de produtos agrícolas e 30 de combustíveis.

b) Mantendo a atenção nas colunas, vemos que uma unidade de produto agrícola requer 0,3 unidades de outros c*ommodities*, uma unidade de produtos manufaturados requer 0,4 unidades de outros c*ommodities*, assim como a produção de combustível. Dessa maneira, a produção mais independente é a produção de produtos agrícolas.

c) Um aumento no custo do combustível iria afetar as indústrias que mais consomem combustíveis. A produção de uma unidade de produto agrícola requer 0,1 unidade de combustível. Já uma unidade de produto manufaturado requer 0,3 unidades de combustível. Note também que a produção do próprio combustível requer 0,4 unidades de combustível. Assim, a indústria de produtos manufaturados e a própria indústria de combustíveis seriam as mais afetadas.

6.3.1 Modelo Aberto

Para um modelo simplificado da economia, tal como o colocado na Tabela 6.1, nem todas as informações estão contidas na Matriz de Leontief. Em particular, cada setor tem uma produção bruta. A **matriz de produção bruta** pode ser representada pela matriz coluna

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

onde x_1 é a produção bruta de produtos agrícolas, x_2 é a produção bruta de produtos manufaturados, e x_3 é a produção bruta de combustíveis.

Os valores das produções brutas utilizadas nos diversos setores das indústrias são dados por AX, lembrando que A é a Matriz de Leontief. Essas unidades de produção bruta, não utilizadas por essas indústrias são chamadas **demandas finais**, ou **excedentes** e podem ser consideradas como se estivessem disponíveis para o consumidor, governo ou exportação. Se colocarmos esses excedentes numa matriz coluna D, então eles podem ser representados pela equação

$$X - AX = D, \qquad \text{ou } (I - A)X = D$$

onde I é a matriz identidade da ordem apropriada. Essa matriz é chamada de **Modelo Aberto de Leontief**. É chamada aberta porque alguns dos produtos da economia estão "abertos", isto é, disponíveis para fora da economia.

Exemplo 6.9 – Produção Bruta

Utilize os dados e a matriz apresenta no início dessa seção. Se quisermos ter 85 unidades de produtos agrícolas, 65 de produtos manufaturados e 0 unidades de combustíveis excedentes, qual deve ser a produção bruta?

Solução

Seja $A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix}$; e D a matriz dos excedentes de produção. Usamos:

$$(I - A)X = D$$

Assim:

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}5 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & -0{,}3 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Devemos então resolver a equação

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}5 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & -0{,}3 & 0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 \\ 65 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Indústria Agrícola} \quad & x_1 = 300 \\ \text{Indústria Manufatureira} \quad & x_2 = 400 \\ \text{Indústria de Combustíveis} \quad & x_3 = 250 \end{aligned}$$

6.3.2 Modelo Fechado

Diferentemente do modelo aberto, o modelo fechado não há excedentes, ou seja, toda unidade de produção bruta é utilizada, e temos $D = 0$. Neste modelo, incorpora-se também o trabalho realizado, e não só as indústrias, como no modelo aberto.

A equação para este modelo é

$$(I - A)X = 0$$

Exemplo 6.10 – Economia fechada

O modelo fechado de Leontief, com matriz de Leontief A pode descrever a economia de um país, com x_1 representando o orçamento do Governo, x_2 as Organizações com Fins Lucrativos, x_3 as Organizações sem Fins Lucrativos e x_4 o orçamento das famílias.

$$A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Encontre os orçamentos totais (ou saídas/outputs) x_1, x_2, x_3, e x_4.

Solução

Organizamos a matriz A na equação $(I - A)X = 0$:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \right) X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0,6 & -0,2 & -0,1 & -0,3 \\ -0,2 & 0,8 & -0,2 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & 0,8 & -0,1 \\ -0,2 & -0,6 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo essa equação, obtemos:

$$x_1 - \frac{55}{82}x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{55}{82}x_4$$

$$x_2 - \frac{15}{41}x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{15}{41}x_4$$

$$x_3 - \frac{12}{41}x_4 = 0 \Rightarrow \frac{12}{41}x_4$$

As três equações ficam em função de x_4, que é nossa variável livre, neste sistema.

Note que a economia satisfaz essa equação se orçamento do Governo é 55/82 vezes o orçamento familiar, se o valor da produção industrial (Organizações com fins lucrativos) é 15/41 vezes o orçamento familiar, e se o orçamento das Organizações sem fins lucrativos for 12/41 vezes o orçamento familiar. A dependência do orçamento familiar é explicada pelo motivo de que a produção industrial é limitada pela oferta de trabalho. Quanto menor o orçamento familiar, menor será a renda de todos os outros setores.

6.4 A Álgebra Linear por trás do Google

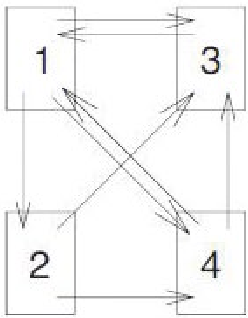
Após uma pesquisa no buscador *Google*, vários são os resultados obtidos. Porém, dentro dos milésimos de segundo entre a pesquisa ser realizada e os resultados aparecerem, uma série de cálculos são feitas pela ferramenta.

Em seu artigo, intitulado "*The $25,000,000,000 eigenvector: the linear algebra behind google*", de 2006, os professores Kurt Bryan e Tanya Leise (Instituto Tecnológico Rose-Hulman e Universidade de Amherst, respectivamente), descrevem os cálculos feitos pelo buscador. Alguns são bem complexos, porém os mais simples utilizam a Teoria de Grafos e Autovalores e Autovetores, e serão descritos a seguir. (BRYAN e LEISE, 2006)

6.4.1 Cálculo da Pontuação de Uma Página

Na Figura 6.1 termos um exemplo de uma pequena rede hipotética, criada com quatro *websites*, numerados de 1 a 4. Em cada um deles, cada flecha significa um link de uma página para outra. Assim, por exemplo, uma flecha da página A para B significa um link da página A para a página B.

Figura 6.1 – Rede Hipotética de Web Sites



Fonte: Bryan e Leise (2006, p. 570).

A pontuação de qualquer página será um número real não negativo, e será relacionada com a quantidade de links que essa página tem com outras.

Note que, ao fazer uma pesquisa no Google, tem-se um retorno de n respostas, cada uma com o index k, sendo que $1 \leq k \leq n$.

No exemplo dado pela Figura 6.1, note que todas as flechas são direcionadas. A cada uma dessas flechas, damos o nome de grafo. Como eles são direcionados, chamamos de grafo direcionado, ou, dígrafo.

Usaremos, a seguir, x_k para denotar a pontuação da página k, com $x_k > 0$ e $x_j > x_k$ indica que a página j tem maior pontuação, e por consequência, é mais importante.

Uma forma de exemplificar é pela Figura 6.1. Temos: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ e $x_4 = 4$; isto implica que a página 3 é a mais importante, sendo a página 2, a menos importante. 1 e 4 ficam empatadas em segundo. Tais números são obtidos apenas contando o número de flechas que chegam em cada uma das páginas.

Porém, o exemplo acima exclui um ponto importante do algoritmo do *Google*: um link a partir de uma página importante para uma página k vale muito mais do que um link de uma página com menos importância para a mesma página k. Exemplo: um link do

Yahoo para sua página pessoal vale muito mais do que um link de alguma outra página pessoal para a sua.

Note que, na Figura 6.1, as páginas 1 e 4 tinham a mesma pontuação, ou seja, eram o destino do mesmo número de links. Entretanto, a página 1 tem um link vindo da página 3, que é a página com maior importância de nossa rede hipotética, enquanto a página 4 tem um link da página 1, que tem pontuação menor. Assim, a página 1 se torna mais importante que a página 4.

A ideia acima colocada é uma ideia analítica, sem cálculos. Porém, para se obter um melhor resultado, utiliza-se um método matemático.

Como primeira tentativa de incorporar a ideia central, vamos calcular a pontuação da página j como a soma de todas as pontuações das páginas que possuem link para j, por exemplo, na Figura 6.1 temos $x_1 = x_3 + x_4$.

Se uma esta página j tem n_j links, sendo que, pelo menos um é para a página k, então, o valor da importância da página k será dado por x_j/n_j, onde x_j é a soma das pontuações das páginas que ligam a j, e n_j é o número de links de j, sendo que pelo menos um é para k.

Para quantificar o número de páginas, para uma rede de z *websites*, temos:

$$L_k \subset W = \{1,2, \dots, z\}$$

Onde L_k é o conjunto das páginas que têm link para k. Logicamente, ele é um subconjunto do conjunto total de páginas, W.

Dessa maneira, dada uma página k qualquer:

$$X_k = \sum_{j \in L_k} \frac{x_j}{n_j}$$

É importante ressaltar que um link de uma página a ela mesma não é contabilizado.

Voltando à Figura 6.1, temos:

$$x_1 = \frac{x_3}{1} + \frac{x_4}{2}$$

x_3 é dividido por 1 pois há um único link da página 3, x_4 é dividido por dois, porque ela tem link direcionado a duas páginas.

De maneira análoga:

$$x_2 = \frac{x_1}{3}$$

$$x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{2}$$

$$x_4 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2}$$

A partir dessas equações, temos um sistema que pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Definição 6.1: Se uma matriz é quadrada, com elementos são não negativos e a soma dos elementos de cada uma das colunas é 1, chamamos de Matriz de Transição, ou Matriz de Markov.

Proposição 6.1: Toda matriz de transição tem 1 como autovalor.

Utilizando 1 como autovalor, obtemos o seguinte autovetor:

$$v = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Os componentes devem somar 1, então temos que:

$$x_1 = \frac{12}{31} \approx 0{,}387, x_2 = \frac{4}{31} \approx 0{,}129, x_3 = \frac{9}{31} \approx 0{,}290, x_4 = \frac{6}{31} \approx 0{,}194$$

Note que, por esse método, surpreendentemente, a página 3 não é a mais importante, e assim não apareceria em primeiro lugar em uma pesquisa. A primeira página a aparecer seria a 1. Para entender isso, note que a página 3 tem um link para a página 1. Assim, toda a importância da página 3 é somada no cálculo da importância da página 1, o que a torna mais importante.

Esse método fornece uma aproximação real, porém não exata. O buscador ainda recorre a outros métodos mais complexos, que não entrarão no escopo deste texto.

6.5 Modelo de interação populacional presa-predador[18]

Seja P_i a população de predadores num instante i, e p_i, a população de presas no mesmo instante i.

Não havendo nenhum predador para caçá-las, a taxa de natalidade das presas é superior à taxa de mortalidade, por exemplo, $p_{i+1} = 1{,}2\, p_i$.

Se não houver presas, a taxa de mortalidade dos predadores excederá a de natalidade, por exemplo $P_{i+1} = 0{,}6P_i$.

Espera-se que quando os dois grupos interajam, haja um crescimento da população de predadores, e diminuição das presas, da forma que a população de predadores poderá ser, por exemplo

$$P_{i+1} = 0{,}6\, P_i + 0{,}5\, p_i$$

Já a população de presas decrescerá, podendo ser descrita por uma equação, como por exemplo

$$p_{i+1} = 1{,}2\, p_i - kP_i$$

onde k é a taxa de morte de presas por predadores, chamada de **taxa de predação**.

Como queremos calcular a interação populacional, montamos um sistema com essas duas equações. Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} P_{i+1} \\ p_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -k & 1{,}2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_i \\ p_i \end{bmatrix}$$

Supondo que as populações iniciais eram de 100 predadores e 1000 presas, e a taxa de predação k seja igual a 0,10, temos a seguinte evolução no número de populações:

Quadro 6.2 - Populações com k = 0,10

i	1	2	3	4	12	16	20	30
P_i	100	560	931	1244	3470	5107	7483	19409
p_i	1000	1190	1372	1556	3488	5111	7483	19409

Fonte: Adaptado de Ferreira (1999).

Nota-se que as populações, tanto de presa como de predador tendem a infinito.

Se a taxa for de 0,18, existirá a seguinte evolução:

18. Adaptado de Ferreira (1999)

Quadro 6.3 - Populações com $k = 0{,}18$

i	1	2	3	4	12	16	20	30
P_i	100	560	927	1214	1371	43	3	0
p_i	1000	1182	1317	1413	940	25	2	0

Fonte: Adaptado de Ferreira (1999).

Com uma taxa de predação um pouco maior, as duas populações irão desaparecer, apesar de haver uma expansão inicial.

6.6 Aplicações com soluções numéricas

O texto a seguir foi escrito como um projeto para a disciplina de Cálculo Numérico, explorando aplicações de sistemas lineares e utilizando métodos numéricos na sua resolução.

6.6.1 Estequiometria de uma reação química.

Na química, define-se equação química como a representação simbólica, e a consequente abreviação, de uma reação ou fenômeno químico. Por sua vez, as reações, ou transformações, como também são conhecidas, são classificadas em duas categorias: químicas e físicas.

As **transformações físicas** não modificam a natureza dos compostos. Os átomos, moléculas ou íons apenas são agitados, arrumados em outra configuração, etc. Podemos exemplificar uma transformação física como a mudança de estado da água. Em seu estado líquido, as moléculas de H_2O estão com certa liberdade de movimentação, e apesar de ter volume fixo, tomará a forma do recipiente. A ser submetida a temperaturas abaixo de zero graus Celsius, a água sofre a transformação chamada solidificação, ou, a passagem do estado líquido para o estado sólido, onde suas moléculas ficaram bem arrumadas, sem liberdade de movimentação, com volume e forma fixas. A passagem do estado sólido ao liquido é chamada fusão. Já, quando está no estado líquido e a agua é aquecida em temperaturas acima de cem graus Celsius (100ºC), ocorre a ebulição, e a água passa para o estado gasoso, onde as moléculas ficam bem espaçadas, com total liberdade de movimentação: volume e forma variáveis. Uma das principais características das transformações físicas é sua reversibilidade.

Já as **transformações químicas** tem por característica sua irreversibilidade: as moléculas iniciais (reagentes) são quebradas, e seus átomos se reagrupam em novas moléculas, formando novos compostos (produtos da reação). Como exemplo, podemos citar a queima do carvão, onde átomos de carbono (C) são consumidos com gás oxigênio (O_2), o que resulta em gás carbônico (CO_2).

Todas as transformações, sejam elas químicas ou físicas, obedecem à chamada Lei de Lavoisier. Após realizar vários experimentos em recipientes fechados, e efetuando pesagens com balanças precisas, Lavoisier concluiu que 'no interior de um recipiente fechado, a massa total não varia, quaisquer sejam as transformações que venham a ocorrer', esta que também ficou conhecida como Lei da Conservação de Massa, ou Lei da Conservação da Matéria. A interpretação mais simples e correta desta lei é que a soma das massas antes da reação é igual a soma das massas após a transformação: Se 15 átomos de carbono foram usados como reagentes na transformação, 15 átomos de carbono precisam, obrigatoriamente, estar nos produtos dessa reação. (FELTRE, 2004)

Para obedecermos esta lei, é importante ficamos atentos ao balanceamento estequiométrico das equações químicas. Para determinar o coeficiente estequiométrico de cada elemento na equação, usaremos um sistema linear. Os coeficientes são as quantidades, em mol (1 mol contém cerca de $6{,}02 \times 10^{23}$ átomos) de cada composto.

Exemplo 6.11 – Equilíbrio da Equação Química (1) (QUADROS; BORTOLI, 2009)

Considere a queima de iso-octeno, principal componente da gasolina, com O_2 na reação estequiométrica abaixo:

$$\mathrm{C_8H_{18} + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O}$$

Determine os coeficientes de cada um dos elementos.

Solução

Lembrando-se da Lei de Lavoisier, devemos atribuir coeficientes às substâncias que aparecem na equação, e que serão nossas incógnitas. Dessa maneira, temos:

$$\mathrm{x_1\ C_8H_{18} + x_2\ O_2 \longrightarrow x_3\ CO_2 + x_4\ H_2O}$$

A seguir, calcularemos a quantidade de cada um dos átomos da reação:

$$C{:}\, 8x_1 = x_3 \Rightarrow 8x_1 - x_3 = 0$$

$$H{:}\, 18x_1 = 2x_4 \Rightarrow 18x_1 - 2x_4 = 0$$

$$O{:}\, 2x_2 = 2x_3 + x_4 \Rightarrow 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$

Como o exemplo é simples, não necessitamos montar a matriz e utilizar o método de Gauss, o que será necessário no exemplo 2. Neste ponto, assumimos uma quantidade para o composto principal dessa transformação, que é o iso-octeno. Fazendo $x_1 = 1$, e resolvendo as equações, obtemos o seguinte balanceamento:

$$1\ C_8H_{18} + 12{,}5\ O_2 \longrightarrow 8\ CO_2 + 9\ H_2O$$

Exemplo 6.12- Equilíbrio da Equação Química (2), adaptado de exercício proposto por Gilat e Subramaniam (2008).

Balanceie a equação química abaixo:

$$P_2I_4 + P_4 + H_2O \rightleftarrows\ PH_4I + H_3PO_4$$

Solução

Inicialmente iremos atribuir coeficientes x_i aos coeficientes de cada elemento da reação:

$$x_1\ P_2I_4 + x_2\ P_4 + x_3\ H_2O \rightleftarrows\ x_4\ PH_4I + x_5\ H_3PO_4$$

Calculando a quantidade de átomos da reação:

$$P: 2x_1 + 4x_2 = x_4 + x_5 \Rightarrow 2x_1 + 4x_2 - x_4 - x_5 = 0$$
$$I: 4x_1 = x_4 \Rightarrow 4x_1 - x_4 = 0$$
$$H: 2x_3 = 4x_4 + 3x_5 \Rightarrow 2x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0$$
$$O: x_3 = 4x_5 \Rightarrow x_3 - 4x_5 = 0$$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Novamente, assumindo $x_1 = 1$, e fazendo uma mudança de variável, $x_i = x_{i-1}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usando a eliminação de Gauss, chega-se à seguinte matriz triangular superior aumentada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -4 \end{array}\right]$$

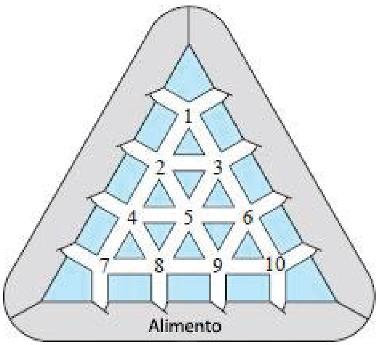
Fazendo as substituições, concluímos que o balanceamento correto é:

$$1\,P_2I_4 + \frac{13}{10}\,P_4 + \frac{64}{5}\,H_2O \rightleftarrows 4\,PH_4I + \frac{16}{5}\,H_3PO_4$$

6.6.2 Probabilidade

A Figura 6.2 é um diagrama de um labirinto usado em experimentos de laboratório.

Figura 6.2 – Labirinto de Experimentos de Laboratório



Fonte: Adaptado de Larson, Edwards e Falvo (2009).

O experimento começa ao se colocar um rato em uma das 10 intersecções do labirinto. Uma vez que o rato sai do labirinto, para parte cinza da imagem, ele não pode retornar. Quando o rato está no interior, em uma das intersecções, ele escolhe um dos caminhos, e esta escolha, assumiremos que será aleatória. Assim, pergunta-se: qual é a probabilidade de que o rato saia onde existe seu alimento, a partir do momento que ele comece na i-ésima intersecção? (LARSON; EDWARDS; FALVO, 2009)

Solução

Chamaremos a probabilidade de chegar à comida, começando da i-ésima intersecção de p_i. A seguir, formaremos equações lineares envolvendo as probabilidades desta intersecção associadas a cada um dos cruzamentos que fazem parte do labirinto, e que fazem fronteira com a i-ésima intersecção. Por exemplo: na intersecção 1, o rato tem quatro caminhos a escolher, com probabilidade de escolha de cada um de $1/4$ - o caminho superior direito, onde ele sairia do labirinto, ou seja, de chance de chegar à comida, idem ao superior esquerdo. Quando vai ao caminho inferior direito, a probabilidade será $1/4 \times p_3$, e no inferior esquerdo, $1/4 \times p_2$. Dessa maneira, temos:

$$p_1 = \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{4}p_3$$

Analogamente, às demais intersecções:

$$\begin{aligned}
p_2 &= \frac{1}{5}(0) + \frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_3 + \frac{1}{5}p_4 + \frac{1}{5}p_5 \\
p_3 &= \frac{1}{5}(0) + \frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{1}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_6 \\
p_4 &= \frac{1}{5}(0) + \frac{1}{5}p_2 + \frac{1}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_7 + \frac{1}{5}p_8 \\
p_5 &= \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{6}p_3 + \frac{1}{6}p_4 + \frac{1}{6}p_6 + \frac{1}{6}p_8 + \frac{1}{6}p_9 \\
p_6 &= \frac{1}{5}(0) + \frac{1}{5}p_3 + \frac{1}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_9 + \frac{1}{5}p_{10} \\
p_7 &= \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{4}p_4 + \frac{1}{4}p_8 \\
p_8 &= \frac{1}{5}(1) + \frac{1}{5}p_4 + \frac{1}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_7 + \frac{1}{5}p_9 \\
p_9 &= \frac{1}{5}(1) + \frac{1}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_6 + \frac{1}{5}p_8 + \frac{1}{5}p_{10} \\
p_{10} &= \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{4}p_6 + \frac{1}{4}p_9
\end{aligned}$$

Reescrevendo as equações, com todas as variáveis no primeiro membro das equações e multiplicando cada uma delas pelo inverso das frações, a fim de ficar apenas com números inteiros nas incógnitas, obtemos a matriz aumentada do sistema, que é:

$$A = \left[\begin{array}{cccccccccc|c} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Como a matriz é de ordem 10, não nos convém a tentar alguma solução manual. Um método numérico, além de extremamente mais rápido, também será mais preciso, já que as chances das respostas serem inteiras são muito baixas. Assim, podemos aplicar o método iterativo de Gauss-Siedel. Para garantir a convergência do método, existe um ponto necessário: a matriz deve ser Diagonalmente Dominante.

Definição 6.2: Uma matriz tem a condição de **Diagonalmente Dominante** se, em cada linha, o módulo do elemento da diagonal for maior ou igual que a soma dos módulos de cada um dos elementos restantes na linha. (RUGGIERO; LOPES, 1996).

É simples analisar cada coluna e ver que essa condição é satisfeita. Dessa maneira, podemos aplicar computacionalmente o método de Gauss-Siedel com vetor inicial

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Na Figura 6.3, pode-se conferir o resultado do método computacional, onde estão as soluções de cada uma das variáveis, a cada iteração. Cada coluna representa uma variável: a primeira coluna, , a segunda, , e assim por diante.

Figura 6.3 – Resultado do método de Gauss-Siedel

0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.250000	0.250000	0.250000	0.312500
0.000000	0.000000	0.000000	0.100000	0.100000	0.132500	0.337500	0.357500	0.380500	0.378250
0.000000	0.040000	0.054500	0.167000	0.188667	0.200383	0.381125	0.423458	0.438152	0.409634
0.023625	0.086750	0.099887	0.216002	0.244107	0.238356	0.409865	0.461625	0.470744	0.427275
0.046661	0.121331	0.130091	0.247386	0.278255	0.261273	0.427253	0.484728	0.490306	0.437895
0.062856	0.143718	0.149220	0.266791	0.299339	0.275352	0.437880	0.498863	0.502290	0.444411
0.073234	0.157717	0.161129	0.278760	0.312352	0.284036	0.444406	0.507561	0.509672	0.448427
0.079711	0.166390	0.168498	0.286142	0.320383	0.289396	0.448426	0.512925	0.514226	0.450906
0.083722	0.171749	0.173050	0.290697	0.325340	0.292704	0.450905	0.516234	0.517037	0.452435
0.086200	0.175057	0.175860	0.293507	0.328400	0.294746	0.452435	0.518276	0.518772	0.453380

Fonte: Elaborado pelos autores.

Por fim, o erro estimado será:

$$\frac{\max|x^{k+1}-x^k|}{\max|x^{k+1}|}=\frac{0,003308}{0,518722}=0,006377211$$

EXERCÍCIOS

01 – Determine a reta que passa pelos pontos:

a) (0, 2) e (5, 3)

b) (9, -1) e (3, 7)

c) (-15, 2) e (0, 0)

d) (-7, -3) e (-2, -1)

e) (3, -12) e (7, 3)

2 – Determine a equação do círculo que passa pelos pontos

a) (0, 3), (1, 2) e (-2, 3)

b) (6, 11), (-4, 1) e (10, -5)

c) (6, 3), (5, 4) e (-3, -2)

03 – Determine a equação da secção cônica que passa pelos pontos (-1, -1), (-1, -2), (1, -1), (-1, -2), (1, -1), (1, -6) e (3, -2).

04 – Determine a equação dos planos que passam pelos pontos a seguir

a) (1, 2, 3), (3, 2, -1) e (7, 3, 1)

b) (-2, -1, 3), (0, 1, 0) e (0, 0, 1)

c) (3, 2, 0), (7, 5, 1) e (0, -2, -3)

05 – Determine a equação das esferas que passam pelos pontos a seguir

a) (3, 4, 5), (1, 4, 3), (3, 1, 3) e (3, 4, 1)

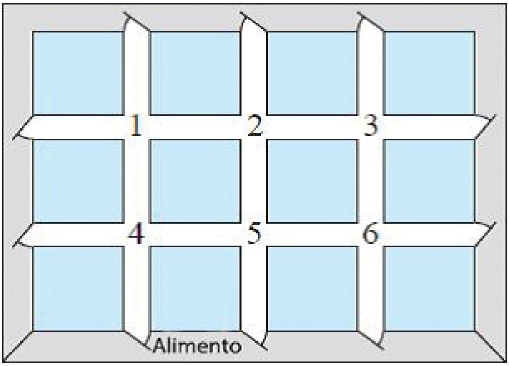
b) (-1, 0, -3), (0, 2, 0), (1, -2, -1) e (2, 0, -2)

06 – Balanceie a seguinte equação química:

$$(Cr(N_2H_4CO)_6)_4(Cr(CN)_6)_3 \ + \ aKMnO_4 + bH_2SO_4 \longrightarrow$$
$$cK_2Cr_2O_7 + dMnSO_4 + eCO_2 + fKNO_3 + gK_2SO_4 + hH_2O$$

07 – Suponha o mesmo experimento realizado na seção 6.6.2, porém, com o labirinto abaixo (Figura 6.4). Calcule a probabilidade do rato emergir no corredor da comida quando ele começar na i-ésima intersecção.

Figura 6.4 – Labirinto do exercício 07



Fonte: Adaptado de Larson, Edwards e Falvo (2009).

CAPÍTULO 7 – OUTRAS APLICAÇÕES

Neste sétimo e último capítulo, apresentaremos algumas aplicações curiosas e interessantes, não necessariamente relacionadas a um assunto específico.

7.1 A matemática do futebol[19]

Em 22 de maio de 2009, a Premier League (Primeira Divisão do Campeonato Inglês de Futebol) tinha 10 jogos da última rodada a serem disputados. O West Bromwich Albion (WBA) estava em última colocação, com 31 pontos, e o Manchester United era o líder, com 87 pontos. As últimas três equipes seriam rebaixadas: o WBA certamente seria um, com outros quatro com chances de terminar nessas colocações. O Manchester United certamente terminaria na primeira colocação.

Um programa *BBC Radio 4*, pediu previsões sobre esses 10 últimos jogos, por um meio de modelagem matemática que vinha sendo desenvolvido, usando um modelo estatístico que poderia ser explicado pelo programa. Tais previsões seriam anunciadas antes dos jogos, e depois deles, comparadas com o resultado real.

Vamos olhar a tabela do campeonato, na data indicada, com Gols e Gols Sofridos (Gols Contra):

Quadro 7.1 - Tabela da Premier League

Time	Pontos	Gols	"Força do Ataque"	Gols contra	"Força da Defesa"
Man. United	87	67	1,46	24	0,52
Liverpool	83	74	1,61	26	0,57
Chelsea	80	65	1,41	22	0,48
Arsenal	69	64	1,39	36	0,78
Everton	60	53	1,15	37	0,80
Aston Villa	59	53	1,15	48	1,04
Fulham	53	39	0,85	32	0,70
Tottenham	51	44	0,96	42	0,91
West Ham	48	40	0,87	44	0,96
Man. City	47	57	1,24	50	1,09

19. Traduzido e adaptado de Spiegelhalter e Ng (2009)

Time	Pontos	Gols	"Força do Ataque"	Gols contra	"Força da Defesa"
Stoke City	45	37	0,80	51	1,11
Wigan	42	33	0,72	45	0,98
Bolton	41	41	0,89	52	1,13
Portsmouth	41	38	0,83	56	1,22
Blackburn	40	40	0,87	60	1,30
Sunderland	36	32	0,70	51	1,11
Hull City	35	39	0,85	63	1,37
Newcastle	34	40	0,87	58	1,26
Middlesbrough	32	27	0,59	55	1,20
WBA	31	36	0,78	67	1,46

Fonte: Traduzido de Spiegelhalter e Ng (2009) com ajustes realizados pelos autores.

O número médio de gols marcados, e consequentemente o número médio de gols sofridos é 46. Dividindo o número de gols de um time pela média, obtemos o que denominamos de "Força do ataque", e dividindo pelo número de gols sofridos, obtemos o que denominamos de "Força de Defesa". Por exemplo, o Arsenal marcou 64 gols: dividindo por 46, temos 1,39. Isso significa que eles marcaram 39% mais gols que a média. O Stoke City levou 51 gols: dividindo pelos 64 gols, obtemos 1,11. Isso significa que eles levaram 11% mais gols que a média.

Outros dois dados que necessitamos são: o número médio de gols dos times que jogam em casa, que nesta temporada foi de 1,36, e a média de gols dos times que jogam fora de casa, que nesta temporada foi 1,06.

Agora, suponha que queremos prever o resultado de Hull City vs Manchester United. Começaremos estimando quantos gols o Hull irá marcar. Eles estão jogando em casa. Então, a média de gols é 1,36. Porém, eles marcam apenas 85% da média de gols (Nossa "Força de Ataque"). Multiplicando, temos: $1{,}36 \times 0{,}85 = 1{,}16$. A defesa do Machester United cede apenas 52% da média de gols sofridos das equipes. Temos como total $1{,}36 \times 0{,}85 \times 0{,}52 = 0{,}60$ gols esperados pela equipe do Hull City.

Com a equipe do Manchester United, usamos o mesmo raciocínio, temos: $1{,}06 \times 1{,}46 \times 1{,}37 = 2{,}12$ gols.

Como ninguém tem 2,12 filhos, nenhum time faz 2,12 gols. Esse é apenas um valor esperado. É o número médio de gols se essa partida fosse jogada infinitas vezes. Para melhores resultados, podemos usar a Distribuição de Probabilidade de Poisson, que nos permitirá distribuir a probabilidade entre o número de gols possíveis. Essa distribuição expressa a probabilidade de um certo evento ocorrer dado um período de tempo, desde que os eventos sejam independentes, e é dada por:

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

onde

$$x = \text{valor do número de ocorrências}$$

$$\lambda = \text{taxa de ocorrência do evento número de eventos esperados}$$

$$e \approx 2{,}71828 \text{ (PORTNOI, 2007)}$$

Dessa maneira, temos as distribuições de probabilidade expressos no Quadro 7.2:

Quadro 7.2 – Distribuição de Probabilidade

Time	Gols Esperados	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Hull City	0,60	55	33	10	2	0	0
Man. United	2,12	12	25	27	19	10	4

Fonte: Adaptado de Spiegelhalter e Ng (2009).

Assim, existem 55% de chances do Hull City não fazer nenhum gol. Também, existem 63% de chances da equipe do Manchester United fazer ao menos dois gols.

Para obter a probabilidade de um resultado real, podemos assumir que os gols marcados por cada equipe são independentes, ou seja, os gols que o Manchester United marcou não dizem nada a respeito dos gols que o Hull City irá marcar.

Vamos então, supor o resultado de 2-0 para o Manchester United. Assim, multiplicamos as probabilidades de a equipe fazer dois gols (27%) e da equipe do Hull City fazer 0 gols (55%). Assim, $0\ 55 \times 0\ 22 \approx 0\ 1484$. Ou seja, há aproximadamente 15% de chances desse resultado acontecer. Porém, existe claramente uma relação entre os resultados das equipes, no sentido que os jogos tendem a ter placares altos ou baixos, o que pode ser chamado de "efeito *pitch*". Estimar tais probabilidades requer um software especial.

Esses modelos estatísticos assumem que o desempenho passado preverá o resultado futuro, e não assumindo outros fatores. Por exemplo, o fato de que o Hull City está tentando evitar o rebaixamento, e o Manchester United já é o campeão da Premier League. Assim, é possível que o Hull City tenha maiores chances de vencer a partida.

No Quadro 7.3, estão os quatro resultados mais prováveis, de acordo com o modelo estatístico descrito.

Quadro 7.3 – Resultados mais prováveis

Casa	Visitante	Mais Provável	2º Mais Provável	3º Mais Provável	4º Mais Provável	Resultado
Arsenal	Stoke	2-0 (14%)	1-0 (13%)	2-1 (9%)	3-0 (9%)	**4-1**
Aston Villa	Newcastle	**1-0 (10%)**	2-0 (10%)	2-1 (10%)	1-1 (10%)	**1-0**
Blackb.	WBA	1-1 (10%)	2-0 (10%)	2-1 (10%)	1-1 (10%)	**0-0**
Fulham	Everton	0-0 (19%)	1-0 (16%)	0-1 (14%)	1-1 (13%)	**0-2**
Hull	Man. U.	0-2 (14%)	**0-1 (14%)**	1-2 (9%)	1-1 (8%)	**0-1**
Liverpool	Tottenham	1-0 (16%)	2-0 (15%)	3-0 (10%)	2-1 (9%)	**3-1**
Man. C.	Bolton	2-1 (10%)	1-1 (10%)	**1-0 (10%)**	2-0 (10%)	**1-0**
Sunderland	Chelsea	0-1 (20%)	0-2 (15%)	0-0 (13%)	1-2 (8%)	**2-3**
W. Ham	Middles.	1-0 (19%)	0-0 (14%)	2-0 (13%)	1-1 (11%)	**2-1**
Wigan	Ports.	**1-0 (17%)**	2-0 (14%)	0-0 (11%)	1-1 (10%)	**1-0**

Fonte: Adaptado de Spiegelhalter e Ng (2009).

Note que a maior chance é de 20%, e, para a maioria dos jogos, há uma chance de cerca de 50% de um desses quatro resultados ocorrerem. Então, é um pouco enganador tratar os resultados "mais prováveis" como previsões – tudo o que o modelo faz é produzir probabilidades razoáveis.

No Quadro 7.4, estão apenas as probabilidades de vitória, considerando todos os resultados possíveis.

Quadro 7.4 – Resultados mais prováveis

Casa	Visitante	Vitória Casa	Empate	Vitória Visitante
Arsenal	Stoke	**72**	19	10
Aston Villa	Newcastle	**62**	21	17
Blackb.	WBA	54	**23**	23
Fulham	Everton	35	35	**30**
Hull	Man. U.	9	19	**72**

Casa	Visitante	Vitória Casa	Empate	Vitória Visitante
Liverpool	Tottenham	**72**	20	9
Man. C.	Bolton	**59**	22	19
Sunderland	Chelsea	10	25	**65**
W. Ham	Middles.	**57**	28	15
Wigan	Ports.	**44**	32	25

Fonte: Adaptado de Spiegelhalter e Ng (2009).

Em suma, o método apresentado conseguiu acertar 8 resultados, e dois placares exatos.

7.2 Efeito Estufa[20]

Nessa seção, vamos fazer uma estimativa da temperatura da superfície da Terra, assumindo que ela é um corpo negro esférico. Na linguagem física, corpo negro é todo aquele que absorvem 100% da radiação que recebe, sem refleti-la. A energia que chega do Sol à Terra é dada pela equação:

$$E_1 = (1-\alpha)\pi r^2 S$$

onde α é coeficiente de reflexão planetário em relação à luz solar incidente, que é por volta de $\alpha = 0{,}3$. S é a irradiação solar total sobre a superfície da Terra, e é cerca de $S = 1367\ W/m^2$. r é o raio da Terra. A área que está efetivamente recebendo luz solar é igual a área do disco πr^2 que está sempre recebendo radiação..

O corpo, a uma temperatura absoluta T emite uma radiação de corpo negro, e sua energia total emitida, E_n, por unidade de área por tempo obedece à Lei de Stefan-Boltzmann

$$E_n = \sigma T^4$$

onde $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ kg\ s^{-3}K^{-3}$, e é conhecida como Constante de Stefan-Boltzmann. Vamos exemplificar com o corpo humano. Sabemos que sua temperatura típica é $T_h = 36{,}8\ °C$, ou $273 + 36{,}8 = 309{,}8\ K$ (Kelvin).

Um adulto em um ambiente de temperatura constante $T_0 = 20\ °C$, ou 297K, terá sua pele à temperatura de $T_p \approx (T_h + T_0)/2 = (36{,}8 + 20)/2 = 28{,}4\ °C$, ou 301,4$K$. Além disso, um adulto pode ter uma superfície de pele com média $A = 1{,}8\ m^2$. Dessa maneira, a energia total emitida por um adulto é

$$E = A\left(\sigma T_p^4 - \sigma T_0^4\right) = A\sigma\left(T_p^4 - T_0^4\right)$$

$$= 1{,}8 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times (301{,}4^4 - 297^4) \approx 90\ J/s$$

20. Traduzido e adaptado de Yang (2009).

o que é cerca de 90 *Watts*. Muito próximo à potência de 100 *Watts* de uma lâmpada comum.

Para a Terra, a energia que é recebida é balanceada pela radiação de corpo negro emitida pela terra.

$$E_2 = A\sigma T_T^4 = 4\pi r^2 \sigma T_T^4$$

onde T_T é a temperatura na superfície da Terra, e $A = 4\pi r^2$ é a área de superfície total da terra. Assumimos que a temperatura do espaço é próxima do zero absoluto, ou seja, $T_0 \approx 0\ K$, embora saibamos, por meio da Radiação Cósmica de Fundo, que sua temperatura é de cerca de $4\ K$. De qualquer maneira, isso tem pouco efeito na nossa estimativa.

Do equilíbrio de radiações, segue que $E_1 = E_2$, e temos

$$(1-\alpha)\pi r^2 S = 4\pi r^2 \sigma T_T^4$$

ou

$$T_T = \sqrt[4]{\frac{(1-\alpha)S}{4\sigma}}$$

Substituindo os valores na equação, temos:

$$T_T = \sqrt[4]{\frac{(1-0{,}3)\times 1367}{4\times 5{,}67\times 10^{-8}}} \approx 255\ K$$

o que é cerca de -18^oC. Isso é baixo, comparado com a temperatura média de 9^oC, ou 282K da superfície terrestre. Essa diferença é a implicação do efeito estufa, causado principalmente pela presença de CO_2 na atmosfera. Os gases do efeito estufa causam um aumento de 27^oC na temperatura terrestre.

7.3 Determinando o tamanho de uma cratera[21]

O cálculo detalhado do tamanho de uma cratera pós impacto é um processo complicado; entretanto, podemos estimar o tamanho aproximado, usando a energia cinética do meteoro ou do projétil.

Para um pequeno meteoro de massa m, com velocidade na hora do impacto v_0, sabemos que a energia cinética K é dada por $K = \frac{1}{2}mv_0^2$. Se assumirmos que o meteoro é uma esfera, de diâmetro D_m, e densidade ρ_m, então temos:

21. Traduzido e adaptado de Yang (2009).

$$K = \frac{1}{2}\rho_m \frac{\pi D_m^3}{6} v_0^2 = \frac{\pi \rho_m D_m^3 v_0^2}{12}$$

Em geral, a velocidade varia de 11 km/h a 70 km/h, e ρ_m também pode variar significativamente. Para um meteoro formado de pedras, podemos usar $\rho_m \approx 4000\ kg/m^3$. Dessa maneira, para um metoro de diâmetro $D_m = 20\ m$ viajando a velocidade $v_0 = 15\ km/s = 15000\ m/s$, a Energia Cinética é:

$$K = \frac{3{,}14 \times 4000 \times (20)^3 \times (15000)^2}{12} \approx 1{,}88 \times 10^{15}\ J$$

Se isso for convertido em unidades de Megatons (Energia gerada pela explosão de um milhão de toneladas de TNT, equivalente a $4{,}18 \times 10^{15}$), temos:

$$K = \frac{1{,}88 \times 10^{15}}{4{,}18 \times 10^{15}} \approx 0{,}45 \text{ Megatons}$$

A cratera gerada pelo impacto terá uma profundidade h, e será criada através de um deslocamento de volume V, de solo de densidade ρ_s. Então, a energia potencial U associada com essa massa deslocada é:

$$U = \rho_s V g h$$

onde $g \approx 9{,}8\ m/s^2$ é a aceleração causada pela gravidade. Se assumirmos ainda que a cratera terá a forma de uma semiesfera com diâmetro d_c e $h \approx d_c/2$, temos

$$U \approx \rho_0 \cdot \frac{\pi d_c^3}{12} \cdot g \frac{d_c}{2} \approx \frac{\pi \rho_s g d_c^4}{24}$$

onde usamos o volume da semiesfera $V = \frac{2\pi}{3} a^3 = \pi d_c^3/12$, com a sendo o raio. Na realidade, apenas uma fração, γ, da energia cinética é usada na criação da cratera pelo impacto, e o resto da energia vira calor e energia das ondas de choque. Então, temos $U = \gamma K$. Para a maioria dos problemas de impacto, γ varia de 0,05 a 2. Isolando d_c, temos

$$d_c = \left(\frac{24\gamma K}{\pi \rho_s g}\right)^{1/4}$$

Usando $\gamma = 0{,}05$ e $\rho_s = 2700\ kg/m^3$, o tamanho da cratera criada pelo impacto do meteoro de diâmetro $D_m = 20\ m$ e energia cinética $K = 1{,}88 \times 10^{15}\ J$ pode ser estimado por

$$d_c \approx \left(\frac{25 \times 0{,}05 \times 1{,}88 \times 10^{15}}{3{,}14 \times 2700 \times 9{,}8}\right)^{1/4} \approx 400\ m$$

Se seguirmos o mesmo procedimento, um meteoro de diâmetro $D_m = 100\ m$ com a mesma velocidade de impacto terá uma energia cinética equivalente a 56 Megatons, o que criará uma cratera de cerca de 1,4 km.

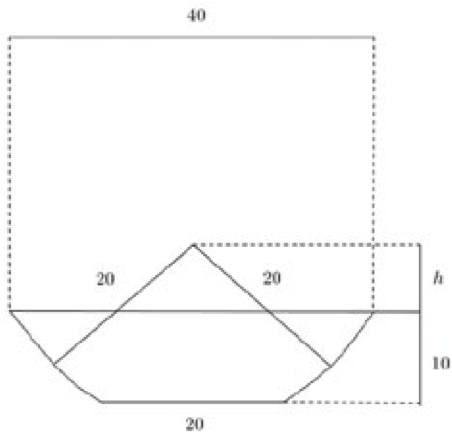
7.4 O problema da bacia

A Figura 7.1 ilustra o perfil de uma peça usada na fabricação de bacias de plástico, onde as unidades de medida são em centímetros.

Para fundir as bacias, é necessário fazer um molde e antes disso, é necessário projetá-lo, desenhá-lo e conhecer suas dimensões.

Conhecidas as dimensões indicadas na Figura 7.1, calculamos a altura h.

Figura 7.1 – Modelo de bacia

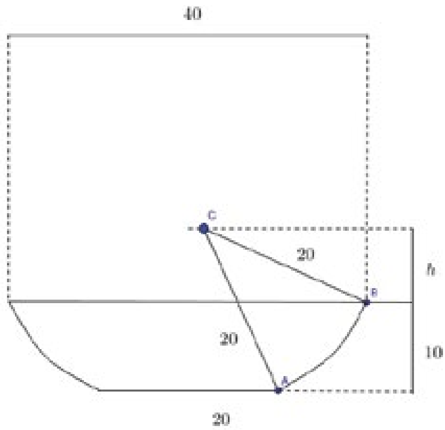


Fonte: Elaborado pelos autores

Este problema pode ser resolvido usando os métodos da geometria analítica.

Aproveitando a simetria da Figura, vamos escolher um sistema de coordenadas, e fixar três pontos: A = (10, 0), B = (20, 10) e C = (x, 10 + h).

Figura 7.2 - Modelo de bacia



Fonte: Elaborado pelos autores

Calculando inicialmente a distância entre B e C:

$$d_{BC}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$20^2 = (20 - x)^2 + (10 - (10 + h))^2$$
$$400 = 400 - 40x + x^2 + 100 - 20(10 + h) + (10 + h)^2$$
$$400 = 400 - 40x + x^2 + 100 - 200 - 20h + 100 + 20h + h^2$$
$$0 = x^2 - 40x + h^2 \ (1)$$

Calculando agora, a distância entre A e C:

$$d_{BC}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$20^2 = (10 - x)^2 + (0 - (10 + h))^2$$
$$400 = 100 - 20x + x^2 + 100 + 20h + h^2$$
$$200 = x^2 - 20x + h^2 + 20h \ (2)$$

Temos assim, um sistema de duas equações. Multiplicando (2) por (-1) e somando em (1), obtemos:

$$20x + 20h = 200$$
$$20h = 200 - 20x$$
$$h = 10 - x$$

Tomando assim $h = 10 - x$ e substituindo em (1):

$$x^2 - 40x + h^2 = 0$$

$$x^2 - 40x + (10 - x)^2 = 0$$

$$x^2 - 40 + 100 - 20x + x^2 = 0$$

$$2x^2 - 60x + 100 = 0 \Rightarrow x^2 - 30x + 50 = 0$$

Resolvendo essa equação para x, obtemos as duas raízes: $x_1 \approx 28{,}22$ e $x_2 \approx 1{,}77$. Basta substituirmos em $h = 10 - x$ e encontramos a altura desejada.

$$h_1 = 10 - x_1$$

$$h_1 = 10 - 28{,}22$$

$$h_1 = -18{,}22$$

Como a altura é negativa, podemos descartar h_1.

Para h_2, temos:

$$h_2 = 10 - x_2$$

$$h_2 = 10 - 1{,}77$$

$$h_2 = 8{,}23$$

Dessa maneira, a altura h procurada é de 8,23 cm.

REFÊRENCIAS

ANTON, H; RORRES, C. **Elementary Linear Algebra**: applications version. 10. ed. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 2010, 1276 p.

AUDROX, D. **Multivariable Calculus**, 2 a 5 de out. de 2007. 4 f. Notas de aula.

BITTINGER, M.L.; ELLENBOGEN D.J.; SURGENT, S. A. **Calculus and its applications**. 10. Ed. Boston: Pearson, 2012, 729 p.

BOYER, Carl B. **História da matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974. 488p.

BRYAN, K. LEISE, T. The $25,000,000,000 Eigenvector: The Linear Algebra behind Google. **Siam Review.** Philadelphia, v. 48. n. 4. p. 569–581. Ago. 2006. Disponível em: <http://www.rose-hulman.edu/~bryan/googleFinalVersionFixed.pdf> Acesso em: 23 set. 2015.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingos. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. 843p.

FERREIRA, R.S. **Matemática aplicada às ciências agrárias**: análise de dados e modelos. Viçosa: UFV, 1999. 333p.

GORDON, W. B.; WANG, W. O.; MATEROWSKI, A.A. **Applied Calculus for Business, Economics and Finance**. Boston: Pearson, 2007. 702 p.

HARSHBARGER, R.J.; REYNOLDS, J.J. **Mathematical Applications for the Management, Life, and Social Sciences**. Boston: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2013. 1095 p.

HOFFMANN, L.D.; BRADLEY, G. L. **Cálculo**: um curso moderno e suas aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2008, 624 p.

LOBO, P. **Teoria Musical 1**. 2010. Disponível em: http://akamai.sscdn.co/gcs/cifraclub/contrib/tutoriais/-exercicios-intervalos_1293798835.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2016.

MODESTI, M. S.; THIEL, A.A. Metodologia para Ensino da Função Exponencial. In: THIEL, A. A. (Org.). **Práticas reflexivas compartilhadas:** abordagens metodológicas no ensino de matemática. Camboriú: Quality Copiadora & Gráfica Rápida, 2015. p. 131-145.

PORTNOI, M. **Probabilidade – Distribuição de Poisson**. 2007. Disponível em <https://www.eecis.udel.edu/~portnoi/classroom/prob_estatistica/2007_1/lecture_slides/aula11.pdf>. Acesso em 12 fev. 2016.

SPIEGELHALTER, D.; NG, Y.L. **Understanding uncertainty: Football Crazy.** 2009. Disponível em: <https://plus.maths.org/content/understanding-uncertainty-football-crazy>. Acesso em: 11 fev. 2016.

THIEL, A. A. **Ensino aprendizagem de matemática & A produção apícola**: integração e desafios. 2002. 202 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

WALLIS, W.D. **Mathematics in Real World**. Nova York: Birkhäuser, 2013. 273 p.

YANG, X,S. **Introductory Mathematics For Earth Scientists**. Edinburgo: Dunedin, 2009. 240 p.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The Concept of Function up to the Middle of the 19 Century. **Archive for the History of the Exact Sciences**, v. 16, n. 1, p. 37-85, 1976/77.

APÊNDICE A - RESPOSTAS DE ALGUNS EXERCÍCIOS

CAPÍTULO 2

01 –

a) $L(x) = 4x - 12$, $CM = 5, RM = 9, LM = 4$, Ponto de Equilíbrio: (3, 30)

b) $L(x) = 3x - 45$, $CM = 4, RM = 1, LM = 3$, Ponto de Equilíbrio: (15, 40)

c) $L(x) = 9x - 45$ $\quad CM = 2, RM = 12, LM = 9$, Ponto de Equilíbrio: (5, 50)

02 –

a) (35, 900)

b) (53, 1459)

c) (140, 100)

03 – $t \approx 0{,}35001\ s$

04 – $t \approx 2{,}626$ décadas

05 –

a) 493,83 Hz

b) 391,95 Hz

c) 439,95 Hz

06 – $6{,}30 \times 10^{29}$ ergs

07 – 12,59

CAPÍTULO 3

01 – Ponto de Máximo: (120, 94800)

02 – Diária = R$ 160,00, Receita Máxima: 220.500

03 – x = 136, L = 53.688

CAPÍTULO 4

01 – $R\$ \approx 32308{,}70$

02 – $\approx R\$\ 160.777{,}75$

03 – 99,75%

04 –

a) $f(x) = \frac{3}{316}x^2, 3 \leq x \leq 7$

b) $f(x) = \frac{2}{9}x, 0 \leq x \leq 3$

c) $f(x) = \frac{2}{x^2}, 1 \leq x \leq 2$

d) $f(x) = \frac{15752961}{1040x^2}, 7 \leq x \leq 9$

CAPÍTULO 6

01 –

a) $-x + 5y - 10 = 0$

b) $-8x - 6y + 66 = 0$

c) $2x + 15y = 0$

d) $-2x + 5y + 1 = 0$

e) $-15x + 4y + 93 = 0$

02 –

a) $-2x^2 - 4x - 2y^2 + 4y + 6 = 0$

b) $200x^2 - 1920x + 200y^2 - 880y - 10200 = 0$

c) $30x^2 - 6x + 30y^2 - 60y - 690 = 0$

03 – $160x^2 + 320xy + 320x + 160y^2 + 800y + 480 = 0$ (Parábola)

04 –

a) $6x - 28y + 2z + 40 = 0$

b) $-x - 2y - 2z + 2 = 0$

c) $-5x + 9y - 7z - 3 = 0$

05 –

a) $24x^2 - 144x + 24y^2 - 152y + 24z^2 - 144z + 560 = 0$

b) $12x^2 - 72x + 12y^2 + 12z^2 - 48z - 48 = 0$

APÊNDICE B – UM RELATO HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

A formação do conceito de um elemento matemático, historicamente surge, ou seja, vai criando forma, quase sempre passando de mãos em mãos, diante de uma necessidade prática do ser humano para encontrar resposta a algo que o incomoda, seja ele real ou fictício, produzindo sentido ao saber.

É fato também, que os livros didáticos simplificam o caminho seguido ou até mesmo descrevem em outra ordem o caminho inicialmente percorrido até a formação dos conceitos. Apresentam uma linearidade e organização na apresentação de um conceito de forma mais didática, sendo que na história da matemática, esta evolução teve uma ou outra ruptura, períodos de estagnação e retornos ao longo do processo.

Youschkevich (1976, p. 9) destaca que o desenvolvimento da noção de função pode ser dividido em três fases:

> *1ª.)* **A Antiguidade***: Nesta fase verifica-se o estudo de alguns casos de dependência entre duas quantidades, sem ainda destacar a noção de variáveis e de funções. Trabalhavam de forma intuitiva com conceitos de área e limite, não tendo nenhuma teoria que procurasse generalizar o tipo de relação recorrente nos exemplos.*
>
> *2ª.)* **A Idade Média***: Etapa em que se expressavam as noções de funções sob forma geométrica e mecânica, prevalecendo para cada caso concreto de dependência entre duas quantidades, uma definição descrita por meio gráfico ou verbal, preferencialmente por uma fórmula.*
>
> *3ª.)* **O Período Moderno***: No fim do século XVI e notadamente durante o século XVII, começam a ter destaque as expressões analíticas de função, sendo que o método analítico para representar as relações entre variáveis, geralmente expressas por meio da soma de séries infinitas, revoluciona a Matemática devido sua extraordinária eficácia e assegura a esta noção um lugar de destaque em todas as ciências exatas. Esta evolução de estudos fez com que a Álgebra passe a dar início a vários outros ramos da matemática como: Geometria Analítica, Análise Matemática, Cálculo Diferencial, e outros.*

Podemos destacar alguns povos e pensadores que contribuíram para o desenvolvimento do conceito de função ao longo da história a partir de estudos relacionados a estes movimentos:

A Antiguidade - Segundo Eves (2004), as formas de sociedade até então constituídas, para se desenvolver e evoluir em sua forma de vida, com suas práticas e necessidades, tiveram origem se localizando ao longo dos rios, Nilo na África, o Tigre e Eufrates na Ásia Ocidental, seguindo para o Ganges no sul da Ásia Central e para o rio Howang Ho e depois para o rio Yangstze na Ásia Oriental. As necessidades iniciais emergiram no campo da aritmética e da mensuração prática voltada para drenagens, irrigação para as terras agricultáveis (solo fértil) e controle de inundações.

Eves (2004, p. 57) explana que,

> *Projetos extensivos dessa natureza não só serviriam para ligar localidades anteriormente separadas, como também a engenharia, o financiamento e a administração desses projetos, e os propósitos que os motivaram requeriam o desenvolvimento de considerável tecnologia e da matemática concomitantemente.*

Assim, vemos que a matemática primitiva surge como uma ciência prática em certas áreas do Oriente Antigo, para dar suporte às atividades ligadas com a agricultura e com a engenharia. Essas atividades requeriam o cálculo e uso de um calendário, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para uso na colheita, no armazenamento e distribuição dos alimentos, a elaboração de métodos para a construção de canais e reservatórios, também para dividir a terra instituindo práticas comerciais e financeiras com vistas ao registro e arrecadação de taxas e propósitos mercantis.

Para Boyer (1974, p. 4) fica evidente que,

> *O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu o caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são partes da geometria elementar. Além disso, sequências de números sugerem uma espécie de teoria dos grupos aplicada bem com proposições geométricas e aritméticas.*

Vemos que o homem pré-histórico por meio de configurações e relações pode em seu sentimento estético com relação a configurações e ordem, assim como no prazer que lhe proporcionava a beleza das formas, ter motivos de pensar pela pura satisfação de fazer matemática, fato presente nos dias atuais.

Esta evolução nos permite considerar que as civilizações mais antigas para alcançar a invenção do número, utilizando o instinto da aplicação funcional, ao associarem os dedos às quantidades, foram expandindo de acordo com suas necessidades outros elementos/formas para contar/enumerar.

Por outro lado, considera-se que a Matemática praticada pelos babilônicos antes do século VII a.C., era a empírica onde a razão, com seus princípios, seus procedimentos e suas ideias, iam sendo adquiridas pelo indivíduo por meio de experiência, ou seja, os babilônicos e egípcios praticavam uma matemática com base nas necessidades e situações práticas ligadas à distribuição de bens e agrimensura. Boyer (1974) cita como exemplo, o fato dos geômetras egípcios, denominados de esticadores de corda (ou agrimensores) serem chamados para com o auxílio de cordas, traçarem as bases de templos ou para realinhar demarcações apagadas de terra.

Acredita-se que as primeiras noções intuitivas do conceito de função deram-se via observação na relação de dependência entre duas quantidades. Veja que, já na origem do número, a contagem estabelece uma relação de correspondência entre conjunto de objetos e uma sequência de números.

Foi na Grécia, a partir dos séculos VI e V a.C., que a sociedade começa a ter um caráter mais dirigido para a ciência, ou seja resposta aos fenômenos, diminuindo o interesse para o lado estritamente da aplicação prática, ainda não formulados, comunicados de mestre para aprendiz. Com os pitagóricos, vemos a procura de leis que pudessem relacionar variáveis físicas de forma quantitativa, e um dos exemplos, é o de estabelecer uma lei que pudesse exprimir relação entre o comprimento da corda e a altura da nota emitida por cordas de mesma espécie e tensionadas da mesma maneira, quando submetidas a condições iguais de vibração inicial. Constataram a existência de uma interdependência entre número, espaço e harmonia.

Boyer (1974) relata que as quatro operações são funções de duas variáveis; entretanto a ideia de função ficou mais evidente nas tabelas babilônicas, de meados de 2000 a.C., onde o uso da aritmética já havia evoluído para a álgebra retórica bem desenvolvida.

Tanto os babilônicos como os gregos já possuíam instintivamente uma noção de funcionalidade com o uso de tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadráticas, de cubos dos inteiros de 1 a 30, e raízes cúbicas, dentre muitos problemas, podendo ser entendidas como ‘funções tabuladas’. Estas tabelas de correspondência escritas em tabletes de argila revelam um instinto funcional destes povos.

Com a tomada de Alexandria, pelos árabes, em 641, vemos que a ciência dos gregos estava em decadência e com a chegada do Império Romano, passa por um processo de grandes transformações.

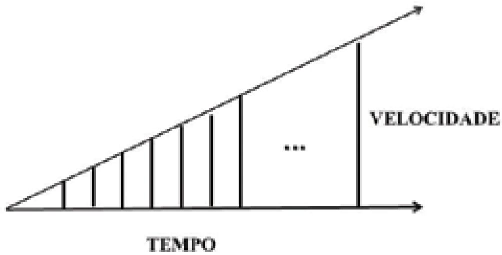
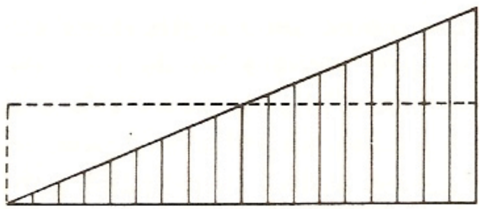
Com o avanço dos árabes e conquista da Índia, eles se depararam com outra cultura matemática: ‘a álgebra e a aritmética’. Um novo sistema de numeração ‘o sistema decimal’, introduzindo o zero, aparece com os hindus.

Avançando no tempo aparece Alkchwrizmi e é por meio da sua obra “Aldschebr Walmakabala” (restauração e conforto), que se origina o nome álgebra.

A Idade Média – No século XII nas escolas de filosofia natural de Oxford e Paris ocorreram alguns avanços da Matemática. Nesta fase predominavam as descrições verbais ou gráficas para representar problemas, e a forma geométrica ou mecânica era expressa para dar a noção de função.

Quadro B-1 – Pensadores e as ideias: evolução do conceito de função na Idade Média.

Pensador	Contribuição
Leonardo Fibonacci (*1170 - 1250*) Itália	Em 1202, sua obra "Liber Abaci", apresentou algumas soluções de equações de 1º, 2º e 3º graus, dando novo fôlego à matemática.
Jordannus Nemorarius (*1225 - 1260*) Alemanha	Começa a utilizar letras para representar um número qualquer, e os sinais de (+) e (-), sob a forma das letras p (plus = mais) e m (minus = menos).
Nicolas Chuquet (1445 - 1488) França	Em 1484 Chuquet escreve um manuscrito intitulado *Triparty en la science des nombres*, que teve sua importância quando comparada ao *Líber Abaci* de Fibonacci, quase três séculos antes. Era composta de três partes: (1^a.) trata das operações aritméticas racionais sobre os números; (2^a.) trata das raízes de números; e a (3^a.) diz respeito a regra da incógnita (álgebra). A parte 1^a. é essencialmente retórica, sendo as quatro operações fundamentais indicadas pelas palavras e frases: plus ($\bar{\bar{p}}$), moins ($\bar{\bar{m}}$), multiplier par e party par. Chuquet, na explicação dos números indo-arábicos afirma que o décimo numeral não tem ou significa um valor, sendo chamado 'cifra, nada, ou numeral sem valor'. Já na 2^a. Parte, ao tratar de raízes de números, faziam uso de uma linguagem sincopada 2. Comparando a expressão moderna $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ na visão de Chuquet seria $R)^2$ .7. *m*. $R)^2$ $2.^0$. Na parte 3, que diz respeito à '*Regle despremiers*' (regra da incógnita), onde nos séculos XV e XVI vários nomes foram dados à coisa desconhecida, tais como *res* (em latim) ou *chose* (em francês) ou *cosa* (em italiano) ou *coss* (em alemão). Nessa última parte da *Triparty*, o pesquisador trata da resolução de equação, onde encontramos muitos problemas que haviam aparecido em seus predecessores, mas com uma importante novidade, Chuquet estava pela primeira vez exprimindo um número negativo isolado numa equação algébrica, como exemplo, a expressão moderna 4.x = - 2, seria . 4 $.^1$ egaulx à *m* . $2.^0$ (BOYER, 1974).

Pensador	Contribuição
Nicole d'Oresme (1323 - 1382) França	Oresme descreveu na forma gráfica a dependência entre a velocidade e o tempo usando linhas verticais e horizontais, para um corpo que se move com aceleração constante. Ao longo da reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante ele traçou perpendicularmente à reta de longitude de um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade. "Os termos latitude e longitude que Oresme usou são equivalentes num sentido amplo à ordenada e abscissa e a sua representação gráfica assemelha-se a geometria analítica" (BOYER, 1974, p. 193). O pesquisador se detinha a representações totalmente imaginárias e qualitativas, jamais utilizando medidas. *Figura B-1 – Forma gráfica da dependência entre a velocidade e o tempo segundo Oresme.*  *Fonte: Elaborado pelos Autores.* Boyer (1974, p. 192) expõe que "[...]. As extremidades desses segmentos, ele percebeu, jazem ao longo de uma reta, e se o movimento uniformemente acelerado parte do repouso, a totalidade dos segmentos velocidade (que chamamos ordenadas) preencherá um triângulo retângulo. Como a área desse triângulo representa a distância percorrida, Oresme forneceu assim uma verificação geométrica da regra de Merton, pois a velocidade no ponto médio do intervalo de tempo é a medida da velocidade final". *Figura B-2 – Representação geométrica da regra de Merton, elaborada por Oresme.*  Fonte: (BOYER, 1974, p.193). O pesquisador representou de forma bem primitiva apenas as funções lineares, não conseguindo imaginar como representaria as curvas. Em 1360, generalizou a teoria das proporções, sendo equivalentes com as regras atuais, de potências de bases iguais; Além de desenvolver o uso de notações específicas para potências fracionárias, descreveu verbalmente a equação de uma reta.

Fonte: Elaborado pelos autores.

O Período Moderno

Em fins do século XVI e a partir do século XVII deu-se início de forma mais intensa os estudos e pensamentos contribuindo para a evolução da noção de função.

Segundo Eves (2004, p. 462) "o cálculo, apoiado pela geometria analítica, foi o maior instrumento matemático descoberto no século XVII. Ele se mostrou notavelmente poderoso e eficiente para atacar problemas impugnáveis em tempos anteriores". A ampla e surpreendente aplicabilidade atraiu vários pesquisadores em matemática da época para a disseminação de artigos, não estando atentos quanto a veracidade de seus fundamentos, mas frequentemente diziam com o argumento de que funcionavam. Para Eves (2004) somente no fim do século XVIII, depois de decorridos muitos absurdos e contradições na matemática, sentiu-se necessidade de examinar as bases da análise para lhes sustentar com uma fundamentação, deixando de lado a intuição e o formalismo do século XVII. Tarefa esta que não foi fácil, diante das várias ramificações. "Assim a própria ideia de função teve que ser esclarecida e noções como as de limite, continuidade, diferenciabilidade e integralidade tiveram de ser cuidadosa e claramente definidas" (EVES, 2004, p. 462). Destaca-se no século XVIII a contribuição dada à matemática pelos membros da família Bernoulli. Já no século XIX, diante do avanço da industrialização nos E.U.A e Europa Ocidental, predominou a tarefa de erigir uma fundamentação lógica sólida, diante da débil estrutura edificada no século anterior. Ocorreu um processo rigoroso de fundamentação da análise, ou seja, a 'artmetização da Análise'; Condorcet (1778), Cauchy (1789), Lacroix (1797), Fourier (1821) e Lobatchevsky (1837) inspirados nos trabalhos de Euler efetuaram estudos aprofundando a concepção de função, efetuando ajustes de algumas noções limitadas de Euler. E no século XX, diante das guerras mundiais (I e II), dos avanços da computação eletrônica, a busca da conquista do espaço exterior a terra, impulsionaram progressos significativos no campo da matemática, ocorrendo uma divisão dela em 'pura' onde atuavam os especialistas e 'aplicada' destinada aos pesquisadores que tinham sua atenção para aplicações práticas imediatas. Neste século os trabalhos estavam voltados para a generalização e se tornaram muito abstratos.

Quadro B-2 – Pensadores e as ideias: evolução do conceito de função na Idade Moderna.

Pensador	Contribuição
François Viète (*1540 – 1603)* França	É considerado como o maior precursor e pai da Álgebra por introduzir uma conversão tão simples quanto fecunda. Usou uma vogal para representar em álgebra, uma quantidade suposta desconhecida ou indeterminada e uma consoante, para representar uma grandeza ou números supostos conhecidos ou dados. Aqui encontramos pela primeira vez na Álgebra, uma distinção clara entre o importante conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida. Infelizmente sua modernidade pairava em alguns aspectos, em outros ele ainda era conservador, mostrando uma álgebra envolvendo uma linguagem matemática intermediária entre a forma retórica usada na antiguidade e a forma simbólica usada atualmente; apesar de usar símbolos germânicos para adição e subtração e diferentes símbolos para parâmetros e incógnitas, o restante de sua álgebra consistia de palavras e abreviações. A partir daí, a Álgebra crava densas raízes e se consolida com sua obra '*Álgebra Speciosa*', em que símbolos podem ter uma significação geral de números, segmentos de retas, entes geométricos, etc.
Galileu Galilei (*1564 - 1642*) Itália	Contribui para a evolução do conceito de função, ao utilizar instrumentos de medidas aprimorados em suas experiências. Diferentemente de Oresme, seus gráficos, embora às vezes muito parecidos, resultam da experiência e da medida. Introduziu um tratamento quantitativo nas suas representações (curvas), expressando relações funcionais em palavras e em linguagem de proporção. Em um de seus relatos Galileu descreve: "O espaço percorrido por um corpo em queda a partir do repouso com movimento uniformemente acelerado, depende do quadrado do intervalo de tempo utilizado ao percorrer esta distância", de forma simbólica: $S = k.\ t^2$.
René Descartes (*1596 - 1650*) França	Considerado o pai da filosofia moderna, aplicou de forma independente a álgebra à geometria. Em sua obra "Lá Geométrie", publicada em 1637, introduzindo o conceito de função. Vemos que na ciência cartesiana tudo era explicado em termos de matéria. Sua expressiva contribuição volta-se para a geometria analítica, apresentando que uma equação de duas variáveis poderia ser representada geometricamente por meio de uma curva, indicando a dependência de duas variáveis (BOYER, 1974, p. 135).
Pierre de Fermat (*1601 - 1665*) França	Também introduziu o conceito de função relacionando a álgebra com a geometria. Sua célebre obra, publicada em 1679, utilizando do aporte das cônicas escreveu a equação de uma reta e de algumas curvas de segundo grau.
Isaac Newton *(1643-1727*) Inglaterra	Contribuiu efetivamente para o conceito de função, procurando mostrar que as curvas não algébricas eram também importantes na análise matemática, ou seja, estudo de processos de infinito (BOYER, 1974).
Gottfried Leibniz (*1646 - 1716*) Alemanha	Em 1694, introduziu a palavra na forma latina, dirigindo seus trabalhos para expressar qualquer quantidade associada a uma curva, como as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de uma curva. Procurou descrever 'a dependência de quantidades geométricas, como tangentes a uma curva', introduzindo as expressões 'variável, constante e parâmetro'.

Pensador	Contribuição
Jacques Bernoulli (*1654 – 1705)* Suíça Jean Bernoulli (*1667 – 1748)* Suíça Leonhard Euler (*1707 - 1783*) Suíça	Atribui-se a Jacob o uso das coordenadas polares, “a dedução em coordenadas retangulares e também em polares, da fórmula do raio da curvatura de uma curva plana, o estudo da catenária, com extensões para fios de densidade variável e fios sob a ação de uma força central, o estudo de muitas outras curvas planas superiores [...]” (EVES, 2004, p. 464). Porém Jean contribuiu ainda mais para a matemática que seu irmão, tendo três filhos: Nicolaus, Daniel e Jean II, todos matemáticos e cientistas renomados no século XVIII. Jean e Euler deram um tratamento mais próximo daquilo que conhecemos hoje como função, para eles compreendido como entidades matemáticas. Consideravam uma função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes. Jean, em 1698, empenhado na solução de um problema envolvendo curvas fez uso do termo função em seu trabalho. Foi o primeiro a identificar uma função com uma expressão analítica, designando-a com a letra Ø. Para Jean: ‘a quantidade’ era composta por variáveis e constantes, ou seja, *‘função de uma quantidade variável é uma quantidade composta de qualquer maneira a partir dessa variável e de quantidades constantes.*’; e, para Euler, aluno de Jean: a explicação para tal conceito era dada através de ‘expressões analíticas’. O pesquisador completou o símbolo dado por Jean para uma função específica, como *n* (1694), a letra maiúscula X (1697) e a letra grega Φ (1718). O uso de *f* dado por Euler para designar uma função, assim como o de parênteses para a variável, para a notação f(x), ocorreu em 1734, quando Euler escreveu *Si f(x) denoter functionem quamcunque ipsius*. Euler ampliou a ideia de ‘fluentes’ de Newton para a Análise, caracterizada pelo estudo de processos infinitos. Em 1748, no livro *Introductio in Analysin Infinitorum, v.1,* cita a definição: *‘uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer maneira a partir dessa variável e de números ou quantidades constantes*’. Posteriormente Euler conclui que o seu conceito de função como ‘expressão analítica’ não poderia funcionar. Então em 1755 no livro *Institutiones Calculi Differentialis*, troca a sua definição original por variáveis dependentes e independentes, dando um sentido operacional. Assim trouxe valiosas contribuições para a linguagem simbólica e as notações utilizadas hoje.
Jean Rond D’Alembert (*1717 - 1783*) França	Apresenta uma discussão entre o que representava uma função contínua e descontínua.
Joseph Louis Lagrange (*1736 - 1813*) Itália	As contribuições matemáticas de Lagrange começaram cedo, em 1754, com a descoberta do cálculo das variações, e continuaram com aplicações para a mecânica em 1756. Ele produziu diversos trabalhos sobre mecânica, cálculo integral e cálculo diferencial.

Pensador	Contribuição
Jean-Baptiste Joseph Fourier *(1768 - 1830)* França	Foi um matemático e físico afamado por iniciar a investigação sobre a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes chamadas séries de Fourier (1822) e a sua aplicação aos problemas da 'teoria analítica do calor', sendo um marco na física-matemática, contribuindo aos fundamentos da termodinâmica e constitui uma melhoria muito importante para a modelização matemática dos fenómenos físicos. Abre a área matemática de teoria de análise de Fourier. No entanto, a simplificação excessiva e pouco rigorosa, geraram duras críticas de Laplace e Lagrange. Em particular, neste trabalho Fourier afirma que uma função de uma variável, contínua ou descontínua, pode ser expandida em uma série de senos de múltiplos da variável. Este resultado incorreto teve, no entanto uma grande importância ao incluir a possibilidade de expandir deste modo também funções descontínuas.
Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (*1781 - 1848*) Boêmia - Império Austro -Húngaro, atual República Checa	Bolzano é considerado, junto com Charles Sanders Peirce e Gottlob Frege, um dos três maiores lógicos do século XIX. Foi um dos pioneiros da exigência da total formalização e rigor lógico das demonstrações matemáticas, admitindo a introdução de conclusões baseadas na intuição. Precursor da teoria dos conjuntos de Cantor. Sua metafísica deriva, em parte, do pensamento de Leibniz, bem como suas concepções sobre o infinito. Devemos também a Bolzano (1817) importantes estudos sobre as funções contínuas não deriváveis, além de trabalhos pioneiros sobre a convergência de séries.
Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (*1805 - 1859*) Alemanha	Atribui-se ao matemático Lejeune Dirichle a moderna definição formal de funções definidas sobre conjuntos numéricos, sendo bem próxima àquelas apresentadas nos livros didáticos atuais. A definição geral de função aceita até o final do século XIX pela comunidade matemática, diz: *'se uma variável y está relacionada a uma variável x, existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então diz-se que y é uma função da variável independente x'*. No início do século XX, uma série de críticas, de diferentes motivos, feitas por lógicos e matemáticos ligados nos fundamentos matemáticos. Coube a sua generalização e disseminação cem anos mais tarde pelo grupo Bourbaki.
Hermann Hankel (*1839 - 1873*) Alemanha	Elaborou a definição: '*Dizemos que y é função de x, se cada valor bem definido de y, sem exigir que y seja definido sobre todo o intervalo pela mesma lei em função de x, nem mesmo que y seja definido por uma expressão matemática explícita de x*'. A ideia de Hankel surgiu nos fim do século XIX e início do século XX. Segundo o pesquisador, sua definição teve origem baseado nas ideias de Dirichlet. Hankel utilizou sua definição nos cursos de análise matemática (COSTA, 1994, p. 61).
Hermann Klaus Hugo Weyl (*1885 - 1955)* Alemanha	Em [194-?], Weyl declara que nenhum pesquisador até então soube explicar o que é uma função. Para ele "uma função f é definida se por um meio qualquer podemos associar a um número a, um número b. Dizemos então que b é um valor da função f para o valor a do argumento." (COSTA, 1994, p. 64).
Augustin Cauchy *(1789 - 1857)* França	Em 1821, na obra Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, apresentou a definição de função como: "diz-se funções de uma ou várias quantidades variáveis das quantidades que se apresentam, no cálculo, como o resultado de operações feitas sobre uma ou várias outras quantidades constantes ou variáveis." (CAUCHY, 1821, p. 100, tradução do autor).

Pensador	Contribuição
Anna Sfard *(1991)* Estados Unidos	Num artigo referente a origem operacional de objetos matemáticos, Anna da ênfase a função apresentando a ideia de que objetos matemáticos são produtos de definições formais, ajudando-nos a compreender a forma tradicional do seu ensino como sendo fruto de uma formalização herdada da Matemática Moderna.
Grupo Bourbaki (pseudônimo coletivo) (Meados do Século XX)	Surge um grupo de matemáticos, iniciando com 5 membros (Henn Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudomé e André Weil), em sua maioria franceses, expondo a matemática moderna por meio de uma série de publicações de textos (livros) com início em 1935. O grupo Bourbaki em 1939 ampliou o conceito de função com a teoria dos conjuntos, passando a abranger relações entre dois conjuntos de elementos, não apenas de números, mas também de qualquer coisa. Deixando a definição mais geral, possibilitou ser definida função de uma maneira simbólica e formal, não estando ligada mais a uma regra de correspondência, mas em uma série de correspondências entre os elementos de dois conjuntos. Esse grupo de matemáticos propõe que: *'uma função é uma terna ordenada* (***X, Y, f***)*, onde* ***X*** *e* ***Y*** *são conjuntos e* ***f*** *é um subconjunto de* ***X*** x **Y**, tal que se (**x, y**) ∈ ***f*** *, então* ***y = y'.***

Fonte: Elaborado pelos autores.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974. 488p.

CAUCHY, A. L. **Cours d'analyse de l'École royale polytechinique**:1re partie: analyse algébrique. Paris, 1821. Disponível em: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90195m/fl2n464.capture>. Acesso em: 04 dez. 2012.

COSTA, L. de Q. **Um estudo da gênese do conceito de funções a partir de um referencial piagetiano**. 1994. 168f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas , Universidade Estadual Paulista, Rio Claro (SP).

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingos. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. 843p.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The Concept of Function up to the Middle of the 19 Century. **Archive for the History of the Exact Sciences**, v. 16, n. 1, p. 37-85, 1976/77.

Conhecer, portanto, significa, em primeiro lugar, constatar os resultados inevitáveis sob determinadas condições dadas. Estas condições correspondem aos acoplamentos ativos, formando a parte coletiva do conhecimento. Os resultados inevitáveis equivalem aos acoplamentos passivos formando aquilo que é percebido como realidade objetiva. O ato de constatação compete ao indivíduo. (FLECK , 2010, p. 83)[1]

[...] escrever não é apenas comunicar resultados definitivos de uma análise, mas escrever é em si uma forma de análise. É uma continuação do processo de análise sob uma restrição mais severa, porque precisamos dar contorno e forma aos nossos pensamentos interiores [...] escrever significa aprofundar nossa pesquisa e nossa reflexão. (ALTRICHTER; POSCH; SOMEKH, 1996, p. 192)[2]

[1]ALTRICHTER, H.; POSCH, P.; SOMEKH, B. Teachers investigate their work: na introduction to the methods of action research. London: Routledge, 1996.

2FLECK, L. Gênese e desenvolvimento de um fato científico: introdução à doutrina do estilo de pensamento e do coletivo de pensamento, Georg Otte e Mariana Camilo de Oliveira (Trad.). Belo Horizonte: Fabre factum, 2010.

Este livro foi composto nas fontes Corbert, Arsenal e
Cambria Math para o Instituto Federal Catarinense
em dezembro de 2016.